

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

28. Band, Heft 4

20. Januar 1944

S. 145—192

## Analysis.

### Mengenlehre:

Giorgi, Giovanni: Riflessioni sui fondamenti primi della teoria degli insiemi. Acta Pontif. Acad. Sci. 5, 35—40 (1941).

Verf. betont den Unterschied zwischen den Begriffen: Vielheit und Menge, existieren und möglich sein. Die Vielheit ist nur qualitativ, nicht aber — wie die Mengen — auch quantitativ definiert. Die Mengen sind jene Vielheiten, die gewissen Axiomen genügen. Als Beispiel wird das Zermelosche Axiomensystem angeführt und vorgeschlagen, dieses mit einem „Belegungsaxiom“ zu ergänzen, d. h. zu fordern, daß die Gesamtheit der eindeutigen Abbildungen einer Menge auf eine andere eine Menge ist.

G. Hajós (Budapest)

Zaubek, Othmar: Über nicht meßbare Punktmengen und nicht meßbare Funktionen. Math. Z. 49, 197—218 (1943).

Es sei  $R$  ein metrischer Raum und  $M(X)$  eine Maßfunktion, deren Definitionsbereich das System aller Teilmengen von  $R$  ist. Für  $A \subset R$  soll  $A_m$  die Menge aller Punkte  $x \in R$  bedeuten, in denen  $A$  meßbar ist [d. i. es gibt zu jedem  $x$  eine Umgebung  $U(x) \subset R$  derart, daß  $A \cdot U(x)$  meßbar ist]. Ist  $A \cdot A_m = A$  bzw.  $= 0$ , so heißt  $A$  lokal meßbar bzw. total nicht meßbar. Die Menge  $A \cdot A_m$  heißt der  $M$ -Kern von  $A$ ; dieser ist lokal meßbar. Die Komplementärmenge in  $A$ , der sog.  $N$ -Kern von  $A$ , ist ein Teil des Randes von  $A$  und, falls  $A$  separabel ist, so ist er leer oder total nicht meßbar. Es gilt also folgender Hauptsatz: Es gibt stets eine Zerlegung der separablen Menge  $A$  in eine meßbare und eine leere oder total nicht meßbare Punktmenge. Ist  $A$  nicht meßbar und ist der erste Summand der umfassendste Durchschnitt einer offenen Menge mit  $A$  oder ist der zweite Summand die umfassendste total nicht meßbare Teilmenge, so ist die Zerlegung eindeutig. Weiter wird u. a. die Frage nach der Existenz von Mengen, die in jedem  $x \in R$  nicht meßbar sind, behandelt. Endlich werden die Begriffe der relativen Meßbarkeit zu  $A$  und der lokalen Meßbarkeit der Punktfunktionen  $f(x)$ ,  $x \in R$ , eingeführt und einige Sätze abgeleitet. J. Novák.

Choquet, Gustave: Préliminaires à une nouvelle définition de la mesure. C. R. Acad. Sci., Paris 215, 52—54 (1942).

L'A. étudie deux classes de définitions de l'égalité  $[m(A) = m(B)]$  des masses de deux ens.  $A$  et  $B$ . Les ens. considérés sont tous les sous-ens. d'un espace abstrait donné  $E$ . On suppose définie pour certains couples de ces ens. une relation réflexive, symétrique et transitive appelée congruence  $\sim$ . On envisage alors les trois axiomes suivants: I. La relation  $m(A) = m(B)$  est symétrique et transitive. II. Deux ens. congruents ont des masses égales. III. Si  $A = \sum_1^\infty a_i$  et  $B = \sum_1^\infty b_i$  avec  $a_i \cdot a_j = 0 = b_i \cdot b_j$  pour  $i \neq j$ , et si  $m(a_i) = m(b_i)$  pour tout  $i$ , on a  $m(A) = m(B)$ . D'autre part on définit l'inégalité des masses en disant que  $m(A) \subset m(B)$  si  $A$  a même masse qu'une partie de  $B$ ; et on considère les deux axiomes suivants: IV.  $m(A) \subset m(B)$  et  $m(B) \subset m(A) \rightarrow m(A) = m(B)$ . V. La relation  $m(A) \subset m(B)$  est transitive. L'A. nomme définition  $\Delta$  une définition de l'égalité des masses vérifiant les axiomes I, II, III, IV et V. Relativement à une  $\Delta$ , la masse d'un ens. n'est pas nécessairement un nombre; c'est un élément d'un ens. partiellement ordonné [par la relation  $m(A) \subset m(B)$ ], cet élément étant conventionnellement le même pour deux ens. équimasses. L'ens. des  $\Delta$  (relatives à un même espace  $E$  et à une même congruence  $\sim$ ) est partiellement ordonné par la définition suivante:  $\Delta_2$  est plus fine que  $\Delta_1$  si, quels que soient les ens.  $A$  et  $B$ , la relation



$m_{A_1}(A) = m_{A_1}(B) \rightarrow m_{A_1}(A) = m_{A_1}(B)$ . — Pour éviter certaines  $\Delta$  trop singulières, on considère une classe particulière de définitions  $\Delta$  introduite comme suit: On se donne, en plus de la congruence  $\sim$ , une famille de transformations ponctuelles biunivoques  $T$ , dont chacune transforme un sous-ens. de  $E$  en un sous-ens. de  $E$ , et vérifiant les trois conditions suivantes: 1°: Si  $A \sim B$ , il existe une  $T$  telle que  $B = T(A)$ . 2°: Pour toute  $T$  définie sur un ens.  $A$ , les transformations induites par  $T$  sur les sous-ens. de  $A$  sont des  $T$ . 3°: Les  $T$  forment un groupe. L'A. nomme alors définition  $\delta$  la définition suivante de l'égalité des masses: On a  $m(A) = m(B)$  si et seulement si  $A = \sum_1^\infty a_i$  et  $B = \sum_1^\infty b_i$ , les  $a_i$  étant disjoints et les  $b_i$  étant disjoints, et si, pour chaque  $i$ , il existe une  $T$  telle que  $b_i = T(a_i)$ . On démontre que toute  $\delta$  est une  $\Delta$  (relativement à la même congruence  $\sim$ ).  
A. Appert (Rennes).

Choquet, Gustave: Choix d'une mesure cartésienne  $\Delta$ . Applications. C. R. Acad. Sci., Paris 215, 101—103 (1942).

On admet la terminologie de la note précédente. Dans la suite  $E$  est un espace cartésien, et la congruence  $\sim$  est la superposabilité ordinaire par déplacement. L'A. nomme isométrie entre deux ens.  $A$  et  $A'$  toute homéomorphie entre  $A$  et  $A'$  telle que, pour tout point  $M$  de  $A$ , si un point  $P$  de  $A$  tend vers  $M$ , le rapport  $MP/M'P'$  tend vers 1, sans que l'on fasse aucune hypothèse d'uniformité. Toute isométrie conserve la mesure lebesguienne et toute mesure de Hausdorff. L'A. appelle  $\delta_C$  la définition  $\delta$  pour laquelle les transformations  $T$  sont les isométries. Lorsque deux ens.  $A$  et  $A'$  ont même masse  $\delta_C$  il existe une transformation ponctuelle biunivoque de  $A$  en  $A'$  qui conserve la masse  $\delta_C$ , la mesure lebesguienne et toute mesure de Hausdorff. — Applications: On considère le cas d'une surface  $S$  applicable au sens de Lebesgue sur un domaine plan  $R$ ; l'A. indique qu'il a construit des exemples où un sous-ens. parfait de  $R$  de mesure linéaire non nulle a sur  $S$  une image de mesure linéaire différente ou même nulle. Pour éviter de telles circonstances, l'A. introduit une nouvelle définition plus stricte de l'applicabilité nommée applicabilité  $\delta_C$  de deux ens.; cette définition consiste à imposer à l'application d'être une correspondance ponctuelle continue conservant la masse  $\delta_C$  de tous les sous-ens. Ceci n'empêche pas qu'une surface applicable  $\delta_C$  sur un domaine plan, puisse avoir son plan tangent, quand il existe, discontinu en tout point. Deux arcs de Jordan de même longueur finie ne sont pas toujours applicables  $\delta_C$  l'un sur l'autre. — D'autre part soit  $f(x)$  une fonction réelle de  $x$  réel. L'A. utilise la notion de masse  $\delta_C$  pour donner une définition nouvelle de la variation totale de  $f(x)$  ainsi que de l'intégrale  $\int f(x)dx$ ; cette intégrale est conçue comme étant une masse  $\delta_C$ . — Observations du Ref.: Les isométries de l'A. généralisent des transformations nommées «applications» par le Ref. (ce Zbl. 15, 400); la seule différence, d'ailleurs importante, entre ces deux notions est que dans les «applications» le rapport  $MP/M'P'$  est supposé tendre uniformément vers 1 quand la distance  $MP$  ou  $M'P'$  tend vers 0. Le Ref. avait démontré (travail cité, p. 350—351 et 375) que les dites «applications» conservent la mesure extérieure lebesguienne, ainsi que certaines mesures extérieures jouissant de propriétés tout à fait analogues à celles de Hausdorff et définies dans un espace métrique quelconque.  
A. Appert (Rennes).

### Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Offord, A. C.: Note on continuous independent functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 12, 86—88 (1941).

Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions réelles dont aucune n'est constante, continues sur l'intervalle fermé  $(0, 1)$ ; l'aut. démontre que, si l'une au moins des valeurs de  $g(x)$  est prise au plus une infinité dénombrable de fois, les deux fonctions ne peuvent être indépendantes en ce sens que l'on n'a pas  $|E_1 E_2| = |E_1| |E_2|$  pour tout couple d'ensembles  $E_1 = \mathcal{C}_x \{\alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ ,  $E_2 = \mathcal{C}_x \{\alpha' \leq g(x) \leq \beta'\}$ .  
Frédéric Roger.



Grüss, G.: Anormale Extremwerte von Funktionen einer Veränderlichen. Jber. Dtsch. Math.-Verein. 53, Abt. 2, 6—9 (1943).

Eine stetige und stückweise differenzierbare Funktion  $f(x)$  hat an einer Stelle ein anormales Extremum, wenn zwar dort  $f(x)$  ein relatives Extremum besitzt, jedoch  $f'(x)$  an beiden Seiten der Stelle und beliebig nahe dazu Werte von beiden Vorzeichen annimmt. Auch eine überall beliebig oft differenzierbare Funktion kann ein solches Extremum besitzen, wofür Verf. folgendes Beispiel gibt:

$$f(0) = 0, \quad \text{sonst} \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(1,1 + \sin \frac{1}{x^5}\right).$$

G. Hajós (Budapest).

Mohr, Ernst: Bemerkung zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Dtsch. Math. 7, 248—251 (1943).

Le théorème de la moyenne de H. A. Schwarz relatif à l'expression du déterminant des valeurs de  $n$  fonctions réelles d'une même variable réelle pour  $n$  valeurs de cette variable, est obtenu par la considération des coefficients des polynômes d'approximation dans l'interpolation de Newton.

Frédéric Roger (Berlin).

Coronato, Savino: Criteri Wronskiani di dipendenza lineare per funzioni di più variabili indipendenti. Comment. Pontif. Acad. Sci. 5, 283—318 (1941).

Bekanntlich existieren für  $m$  Funktionen mit  $n$  Veränderlichen  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , in einer offenen, zusammenhängenden Menge  $C$  verschiedene Kriterien, welche die lineare Abhängigkeit der Funktionen selbst im Feld  $C$  sicherstellen, d. h. das Vorhandensein von  $m$  (nicht gleichzeitig verschwindenden) Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , so daß man für jeden Punkt von  $C$   $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_m f_m = 0$  hat. Diese Kriterien werden durch das identische Verschwinden einer gewissen Anzahl von  $M$  Determinanten, welche aus den gegebenen  $m$  Funktionen und ihren Teilableitungen bestehen, ausgedrückt. Verf. bestimmt ein von Picone in seinen Vorlesungen an der Universität Rom aufgestelltes Kriterium näher, wobei er mehrere Kriterien gibt, in denen u. a. die Zahl  $M$  der Determinanten, die identisch verschwinden sollen, so klein wie möglich gehalten wird. Für  $n = 1$  erhält Verf. seinerseits mit einer kleinen Variation das altbekannte Peanosche Kriterium für die lineare Abhängigkeit von  $m$  Funktionen einer einzigen Veränderlichen. Es folgt ein Beweis für die Äquivalenz zwischen dem Peanoschen und dem neuen Kriterium.

L. Cesari (Pisa).

Frola, Eugenio: Un teorema sulla derivazione delle successioni di funzioni additive. Atti Accad. Sci. Torino 78, 120—124 (1943).

Démonstration en trois points du théorème suivant: Etant donnée une suite  $\{\varphi_n(\delta)\}$  de fonctions additives, absolument continues, définies sur une famille d'ensembles constituant un corps  $k$ , qui convergent vers une fonction additive absolument continue  $\varphi(\delta)$ , une condition suffisante pour que la suite des dérivées respectives  $\{f_n(P)\}$  converge vers la dérivée  $f(P)$  de  $\varphi(\delta)$  sur un ensemble fermé  $\gamma_0$  de  $k$ , est que dans  $\gamma_0$  les fonctions  $f_n(P)$  et  $f(P)$  soient également continues.

Frédéric Roger.

Wendelin, H.: Konvergenz- und Häufungsstellensätze nebst Anwendungen auf Darbousche Summen. Dtsch. Math. 7, 195—204 (1943).

Die Tatsache, daß die unteren Darbouschen Summen einer beschränkten, reellen Funktion  $f(x)$  nach ihrer oberen Grenze, dem unteren Darbouschen Integral, streben, sobald nur die maximalen Teilintervalllängen der zugrunde liegenden Intervallzerlegungen nach 0 streben, wird meistens mittels Aufeinanderlegen von Intervallzerlegungen bewiesen. Verf. weist darauf hin, daß dies auch aus der elementaren Abschätzung  $s_1 \leq s_2 + N_1 D \lambda_2$  folgt, wobei  $s_1$  und  $s_2$  zwei untere Darbousche Summen,  $N_1$  die Anzahl der Teilungspunkte bei der zu  $s_1$  gehörenden Zerlegung,  $\lambda_2$  die maximale Teilintervalllänge bei der zu  $s_2$  gehörenden Zerlegung,  $D$  die Differenz zwischen oberer und unterer Grenze von  $f(x)$  bedeutet. Entsprechendes gilt für obere Summen. Die bei dem Beweis vorkommenden, auf Konvergenz und Häufung bezüglichen Schluß-



weisen werden als Hilfssätze ausgesprochen und samt Verallgemeinerungen und Verschärfungen ausführlich behandelt.

G. Hajós (Budapest).

Weber, Hans R.: Berechnung zweier in der Plattentheorie auftretenden bestimmten Integrale. Ing.-Arch. 13, 377—380 (1943).

$\int_0^{2\pi} f(\psi) d\psi$  wird durch die Substitution  $e^{\psi i} = z$  in  $\frac{1}{i} \int f\left(\frac{\ln z}{i}\right) \frac{dz}{z}$  transformiert, das über den Einheitskreis erstreckt werden muß, dessen Mittelpunkt der 0-Punkt ist.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi}{(\cos\beta - \cos\psi)^2} d\psi = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{n\psi i}}{(\cos\beta - \cos\psi)^2} d\psi = \operatorname{Re} \frac{4}{i} \int \frac{z^{n+1}}{(z - e^\beta)^2 (z - e^{-\beta})^2} dz.$$

Wenn  $\beta \neq 0$  ist, folgt mit dem Residuensatze

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\psi}{(\cos\beta - \cos\psi)^2} d\psi &= 2\pi \frac{e^{-n|\beta|}}{\sin^2\beta} (n + \operatorname{Etg}|\beta|), \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos[a - \cos(\psi - \eta)]}{(\cos\beta - \cos\psi)^2} \ln \frac{\cos c - \cos(\psi - \eta)}{\cos a - \cos(\psi - \eta)} d\psi \\ &= 2ie^{-\eta i} \int \frac{(z - e^{a+\eta i})(z - e^{-a+\eta i})}{(z - e^\beta)^2 (z - e^{-\beta})^2} \ln \frac{(z - e^{c+\eta i})(z - e^{-c+\eta i})}{(z - e^{a+\eta i})(z - e^{-a+\eta i})} dz. \end{aligned}$$

Sind  $\beta, c$  und  $a \neq 0$ , so liegen im Innern des Einheitskreises 3 Pole. Der Pol  $e^{-|\beta|}$  wird durch einen Kreis, und die Pole  $e^{-|c|+\eta i}$  und  $e^{-|a|+\eta i}$  werden durch eine hantelförmige Kurve herausgeschnitten. Im übrigbleibenden Gebiete des Einheitskreises ist der Integrand eindeutig und analytisch. In gegenüberliegenden Uferpunkten der hantelförmigen Kurve unterscheidet sich der  $\ln$  um  $2\pi i$ . Die Integrale über die Kreise der hantelförmigen Kurve gehen nach 0. Das Integral über den Kreis um den Pol  $e^{-|\beta|}$  wird mit dem Residuensatze ausgewertet.

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\cos[a - \cos(\psi - \eta)]}{(\cos\beta - \cos\psi)^2} \ln \frac{\cos c - \cos(\psi - \eta)}{\cos a - \cos(\psi - \eta)} d\psi \\ &= \frac{2\pi}{\sin^2\beta} \left\{ \frac{\cos a \cos\beta - \cos\eta}{\sin|\beta|} \ln \frac{\cos(|\beta| + |c|) - \cos\eta}{\cos(|\beta| + |a|) - \cos\eta} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \frac{|a| - |c|}{2} \frac{\cos\left(\frac{|c| - |a|}{2} + |\beta|\right) - \cos\frac{|c| + |a|}{2} \cos\eta}{\cos(|c| + |\beta|) - \cos\eta} \right\} \end{aligned}$$

Ludwig (Hannover).

### Allgemeine Reihenlehre:

Wendelin, H.: Verallgemeinerung der bekannten Beziehungen zwischen den Grenzen und Limites der Folgen  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  und  $(x_n + y_n)$ ,  $(x_n \cdot y_n)$ . Dtsch. Math. 7, 204—205 (1943).

Verf. hat in einer früheren Arbeit [Dtsch. Math. 6, 265—266 (1941); dies. Zbl. 26, 208] einen einheitlichen Beweis bekannter elementarer Sätze über untere und obere Grenzen bzw. Limites von Summenfolgen und Produktfolgen mitgeteilt (daß z. B.  $\lim x_n + \lim y_n \leq \lim (x_n + y_n)$ ). Hier faßt er diese Sätze allgemeiner, indem er, statt von Summe oder Produkt zu sprechen, von einer monoton wachsenden Funktion zweier Variablen spricht. Er fordert zwar auch Stetigkeit, benutzt sie aber nicht. Die Beweise laufen den früheren völlig analog. — In gewissen Aussagen ist bei Grenzen „alle“, bei Limites „fast alle“ zu sagen. Das hat Verf. in der früheren Arbeit nicht berücksichtigt, diese Lücke aber hier teilweise beseitigt. Im Satz I sollte  $n$  etwa so eingeschränkt werden, wie das im Satz II geschah.

G. Hajós (Budapest).

Bosanquet, L. S.: Note on the Bohr-Hardy theorem. J. London Math. Soc. 17, 166—173 (1942).

Für beliebiges  $\alpha$  bedeuten  $A_n^\alpha$  die durch die Identität  $(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n$  ( $|x| < 1$ ) definierten Größen. Ferner werde für eine beliebige Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  wie üblich  $S_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} s_\nu$  mit  $s_\nu = a_0 + a_1 + \dots + a_\nu$  gesetzt (Cesàrosche Summen). Dann gilt der folgende Satz: Es sei  $\alpha \geq 0$ ,  $p \geq 0$ , und es sei  $\varepsilon_n$  eine fest gegebene Zahlenfolge. Für eine beliebige Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit  $S_n^\alpha = o(n^{\alpha+p})$  ist dann und nur dann  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n$  stets  $(C, \alpha)$ -summierbar, wenn  $\varepsilon_n$  den beiden Bedingungen genügt: (1)  $\varepsilon_n = O(n^{-p})$ , (2)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha+p} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty$ , wobei  $\Delta^\alpha \varepsilon_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\alpha-1} \varepsilon_\nu$ . Sind die beiden Bedingungen erfüllt, so sind die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\alpha-1} \Delta^\rho \varepsilon_n$  für  $0 \leq \rho \leq \alpha$  sämtlich  $(C, \alpha - \rho)$ -summierbar, für  $\alpha \leq \rho \leq \alpha + 1$  sämtlich konvergent, und zwar durchweg mit derselben Summe. Der Satz bleibt bei Vertauschung von  $O$  und  $o$  richtig. — Der hinreichende Teil dieses Satzes wurde für ganzes  $\alpha$  und  $p = 0$  unabhängig von G. H. Hardy und H. Bohr, für beliebiges  $\alpha \geq 0$  und  $p = 0$  von A. F. Andersen [vgl. insbesondere Proc. London Math. Soc., II. s. 27, 39—71 (1928)] bewiesen; der notwendige Teil findet sich für ganzes  $\alpha$  und  $p = 0$  bei M. Fekete [Math. természett. Ertes. 35, 309 bis 324 (1917)]. Verf. gibt in der vorliegenden Arbeit einen neuen, allgemeinen Beweis des Satzes. — Weiter wird noch gezeigt, daß der in Rede stehende Satz im Falle  $p = 0$  auch die folgende äquivalente Fassung zuläßt: Ist  $\alpha \geq 0$ , so folgt für eine feste Folge  $\varepsilon_n$  dann und nur dann aus der  $(C, \alpha)$ -Summierbarkeit einer Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  stets die  $(C, \alpha)$ -Summierbarkeit der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ , wenn  $\varepsilon_n$  und  $A_n^\alpha \Delta^\alpha \varepsilon_n$  schwankungsbeschränkt sind. Ersetzt man die  $(C, \alpha)$ -Summierbarkeit von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  durch ihre  $(C, \alpha)$ -Beschränktheit, so muß zusätzlich  $\varepsilon_n = o(1)$  gelten. F. Lösch (Rostock).

Walsh, C. E.: Note on an analogue of Mercer's theorem. J. London Math. Soc. 17, 13—17 (1942).

Die Note befaßt sich mit dem folgenden, von L. S. Bosanquet [J. London Math. Soc. 13, 177—180 (1938); dies. Zbl. 19, 162] herrührenden Analogon zum Mercerschen Grenzwertsatz: Ist für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(1+q)y_n = x_n + q \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1} \quad (q = r + is, r \neq -1)$$

und gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta y_n| < \infty$  (wobei  $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$ ), so existiert eine Konstante  $C$ , mit der auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta \left\{ x_n - C \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2+q)} \right\} \right| < \infty$$

gilt; für  $r > -1$  ist  $C = 0$ . — Verf. beweist zwei allgemeinere Sätze, aus denen sich der vorstehende Satz durch einfache Transformationen gewinnen läßt: (I) Gilt für  $n \geq N$

$$t_n - a_n t_{n-1} = (1 - a_n) y_n, \quad \text{wobei} \quad |1 - a_n| \leq K(1 - |a_n|)$$

( $K$  positive Konstante), so folgt aus  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta y_n| < \infty$  auch  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta t_n| < \infty$ . (II) Gilt für  $n \geq N$

$$t_{n-1} - b_n t_n = (1 - b_n) y_n, \quad \text{wobei} \quad b_n \neq 0, \quad |1 - b_n| \leq K(1 - |b_n|)$$

( $K$  positive Konstante), so folgt aus  $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta y_n| < \infty$  das Bestehen der Beziehung  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta \left\{ t_n - l \left( \sum_{s=N}^n b_s \right)^{-1} \right\} \right| < \infty$  mit einer geeigneten Konstanten  $l$ . — Aus den Sätzen (I)



und (II) ergibt sich weiter eine Verallgemeinerung des eingangs angeführten Satzes, die sich im wesentlichen bereits bei L. S. Bosanquet und H. C. Chow [J. London Math. Soc. 16, 42—48 (1941)] findet, ferner ein im wesentlichen von G. Hayashi [Tôhoku Math. J. 45, 329—331 (1939); dies. Zbl. 21, 22] herrührendes Resultat.

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

Burchall, J. L., and T. W. Chaundy: Expansions of Appell's double hypergeometric functions. 2. Quart. J. Math., Oxford Ser. 12, 112—128 (1941).

In Teil I (vgl. dies. Zbl. 25, 163) hatten die Verff. die Appellschen doppelt hypergeometrischen Funktionen als Produkte einfach hypergeometrischer Funktionen definiert, welche einen oder mehrere Parameter gemeinsam haben. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen sie sich mit solchen Produkten, in denen die Produktfunktionen sämtliche Parameter verschieden haben. Es entstehen doppelt hypergeometrische Funktionen höherer Ordnung, wie Verff. durch Reihenentwicklung der betreffenden Produkte dartun. Sie geben für diese Funktionen mehrere Beispiele. Wenn die Argumente der Funktionen aufgespalten werden, entstehen Additionsformeln, welche Verff. mit Hilfe geeigneter Eulerscher Integraldarstellungen ableiten. Analog wie bei den einfachen hypergeometrischen Funktionen können auch bei den vorliegenden Funktionen durch Grenzübergang konfluente Funktionen gewonnen werden, und Verff. geben Darstellungen in Form von Doppelreihen für die sieben konfluenten doppelt hypergeometrischen Funktionen nach P. Humbert. Für diese Funktionen leiten sie insgesamt 26 Darstellungen durch einfach unendliche Reihen ab. Im Anschluß an die Eulerschen Integrale für die einfach hypergeometrischen Funktionen betrachten Verff. eine Reihe von Darstellungen mittels Doppelintegralen für die doppelt hypergeometrischen Funktionen. Aus ihren Formeln leiten Verff. sodann einige bekannte Reihendarstellungen für obige Funktionen ab, in denen Besselsche Funktionen auftreten. Zum Schluß wenden sie sich den Whittakerschen Funktionen und als Sonderfall den Laguerreschen Funktionen zu.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

### Funktionentheorie:

Claus †, Heinrich: Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen. Math. Z. 49, 161—191 (1943).

Die vorliegende Arbeit gibt im wesentlichen den Inhalt der Dissertation des Verf. wieder, der am 21. VII. 1942 an den Folgen einer Verwundung gestorben ist. Die Veröffentlichung besorgte unter teilweiser Überarbeitung Herr F. Lösch, von dem auch die Anregung zu der Arbeit ausgegangen war.

Es wird ein Funktionselement (1)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}$  mit (2)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$  zugrunde gelegt. Der bekannte Lückensatz von Fabry besagt: Enthält die Folge  $a_n$  der Koeffizienten von (1) eine ausgezeichnete Teilfolge (3)  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_\nu}, \dots$  mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) derart, daß für ein  $\vartheta$  aus  $0 < \vartheta < 1$  alle Koeffizienten  $a_n$  mit  $n_\nu(1 - \vartheta) \leq n \leq n_\nu(1 + \vartheta)$ , abgesehen von  $a_{n_\nu}$  selbst und gewissen weiteren

Ausnahmekoeffizienten, in ihrer Gesamtheit der Bedingung  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$  genügen (also das Regularitätsverhalten von  $f(z)$  längs  $|z| = 1$  nicht beeinflussen und in diesem Sinne „unwesentlich“ sind), so ist  $f(z)$  nicht in das Innere des Einheitskreises fortsetzbar, wenn die Anzahl  $\psi(n_\nu)$  der genannten, in der  $\vartheta$ -Umgebung von  $a_{n_\nu}$  auftretenden Ausnahmekoeffizienten (die „wesentlich“ sein dürfen in dem Sinne, daß für ihre

Gesamtheit  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$  ist) der Beziehung  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi(n_\nu)/n_\nu = 0$  genügt. Es ist nicht möglich, diesen Satz in der Weise zu verschärfen, daß man allgemein die Größenordnung  $\vartheta n$  der Lückenlängen verkleinert. Vielmehr gibt es zu jeder mit  $n$  gegen  $\infty$



wachsenden positiven Funktion  $\varphi(n)$  mit  $\varphi(n)/n \rightarrow 0$  ein fortsetzbares Funktionselement (1), in dessen Koeffizientenfolge  $a_n$ , die (2) erfüllt, ausgezeichnete Teilfolgen (3) vorhanden sind, für die alle  $a_n$  mit  $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leq n \leq n_\nu + \varphi(n_\nu)$  außer  $a_{n_\nu}$  selbst verschwinden [dazu und für Literaturangaben vgl. F. Lösch, Math. Z. 32, 415—421 (1930)]. Will man daher zu Nichtfortsetzbarkeitskriterien gelangen, die nur Lücken von kleinerer Größenordnung als  $\vartheta n$  fordern, so müssen zu der Lückenbedingung notwendig weitere Bedingungen über die Koeffizientenfolge hinzutreten. In der vorliegenden Arbeit ist diese weitere Bedingung eine Vorschrift über die Größenordnung der gesamten Koeffizientenfolge  $a_n$ , die in einfacher Weise mit der Größenordnung der geforderten Lücken gekoppelt ist. Das schärfste erzielte Ergebnis sei im folgenden formuliert. Entsprechend einer auch beim Fabryschen Satze möglichen Verallgemeinerung wird darin nur eine einseitige Lückenbedingung gefordert. — Es sei  $\varphi(x) > 0$  eine in  $x \geq 0$  differenzierbare Funktion mit  $\varphi(x)/x \rightarrow 0$ ,  $\varphi(x)/\log x \rightarrow \infty$ ,  $\varphi'(x)$  mono-

ton  $\rightarrow 0$  bei  $x \rightarrow \infty$  (Beispiel:  $\varphi(x) = x^\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$ ). Es sei  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1$  (was  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$  zur Folge hat). Es enthalte die Folge  $a_n$  eine ausgezeichnete Teilfolge

$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_\nu}, \dots$  mit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) derart, daß abgesehen von gewissen Ausnahmekoeffizienten für die Gesamtheit aller  $a_n$  aus den linksseitigen Umgebungen (4)  $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leq n < n_\nu$  der  $a_{n_\nu}$  oder für die Gesamtheit aller  $a_n$  aus den rechtsseitigen Umgebungen (5)  $n_\nu < n \leq n_\nu + \varphi(n_\nu)$  der  $a_{n_\nu}$ , die Beziehung

$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$  besteht [wobei zu beachten ist, daß diese Beziehung sehr wohl erlaubt, daß in den „Lücken“, d. h. in den Umgebungen (4) oder (5), außer den Ausnahmekoeffizienten „wesentliche“ Koeffizienten im oben verwendeten Sinne auftreten]. Dann ist das Funktionselement (1) nicht in das Innere des Einheitskreises fortsetzbar, wenn die Anzahl  $\psi(n_\nu)$  der genannten Ausnahmekoeffizienten in den linksseitigen Umgebungen (4) bzw. den rechtsseitigen Umgebungen (5), welche in ihrer Gesamtheit nur

der Forderung  $\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$  genügen müssen, die Beziehung  $\psi(n_\nu)/\varphi(n_\nu) \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow \infty$  erfüllt. — Es wird nicht sogleich dieser allgemeinste Satz bewiesen, sondern zunächst der Sonderfall  $\varphi(n) = n^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) in Analogie zum Hadamardschen Lückensatz, d. h. ohne Zulassung von Ausnahmekoeffizienten, erledigt, jedoch sofort in der einseitigen Form. Sodann wird, wieder ohne Zulassung von Ausnahmekoeffizienten und in der einseitigen Form, der Fall eines allgemeinen, nur den genannten Bedingungen genügenden  $\varphi(n)$  behandelt. Erst zum Schluß wird der Übergang zu dem formulierten Analogon des Fabryschen Satzes durchgeführt. Bei den Beweisen bedient sich Verf. einerseits gewisser Polynome, die mit den zu einer Kurve gehörigen Tschebyscheffschen Polynomen eng zusammenhängen und schon von G. Szegő [Math. Ann. 87, 90—111 (1922)] bei Nichtfortsetzbarkeitsfragen verwendet wurden, andererseits der Methode der Reihentransformation ( $E$ -Transformation) in der Form, wie sie F. Lösch [vgl. etwa Math. Z. 36, 202—262 (1932); dies. Zbl. 5, 201] zum Studium der funktionentheoretischen Lückensätze benützt hat. Diese Hilfsmittel werden in dem erforderlichen Umfang vor Eintritt in die eigentlichen Beweise gesondert dargestellt.

Meyer-König (Stuttgart).

**Remak, Robert:** Über eine spezielle Klasse schlichter konformer Abbildungen des Einheitskreises. Mathematica, Zutphen B 11, 175—192 u. 12, 43—49 (1943).

Wir sagen,  $f(z)$  gehört zur Hurwitzschen Klasse  $H$ , wenn  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  und sämtliche Funktionen  $z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i\theta_n} z^n$  ( $\theta_i$  beliebig) den Einheitskreis schlicht abbilden.



In § 1 zeigt Verf., daß dann notwendigerweise die Bildfigur von  $|z| = 1$  sternig sein muß. Dies wurde bereits von W. Alexander [Ann. of Math., II. s. 17, 12—22 (1915)] behauptet, aber unrichtig bewiesen. In § 2 wird der Satz bewiesen:  $f(z)$  liege dann und nur dann in  $H$ , wenn  $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ . Ist  $z_1 \neq z_2$ ,  $|z_1| = |z_2| = 1$ , so ist auch

$f(z_1) \neq f(z_2)$ . Es ist stets  $f(\varrho e^{i\theta}) \neq 0$  wenn  $\varrho < 1$ . Ist  $f'(1) = 0$ , aber sonst  $f'(e^{i\theta}) \neq 0$ , so sind die  $a_n$  reell,  $\leq 0$  und  $\sum n|a_n| = 1$ . Gibt es noch weitere Stellen  $e^{i\theta}$ , außer 1, für die  $f'(e^{i\theta}) = 0$ , so müssen diese Stellen  $M$ -te Einheitswurzeln sein ( $M \geq 2$  ganz)

und  $f(z)$  hat die Gestalt  $z + \sum_{q=1}^{\infty} a_{Mq+1} z^{Mq+1}$ . Ist  $a_i = 0$  ( $2 \leq i < p$ ) und  $a_p \neq 0$ , so ist  $|f(z)| \leq 1 + \frac{1}{p}$  für  $|z| \leq 1$ ,  $|f(z)| \geq 1 - \frac{1}{p}$  für  $|z| = 1$ . Das Gleichheitszeichen tritt nur für die  $(p-1)$ -spitzigen Epizykloide  $z - \frac{z^p}{p}$  auf. Ist  $f(z)$  ein Polynom und  $f'(1) = 0$ , so besitzt die Bildfigur eine einspringende Spitze um die reelle Achse. Durch ein Gegenbeispiel wird gezeigt, daß dies für allgemeines  $f(z)$  nicht richtig ist.

E. Hlawka (Wien).

Martinelli, Enzo: Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs. Comment. math. helv. 15, 340—349 (1943).

D'après un théorème de Hartogs, si une fonction  $f(z_1, \dots, z_n)$  est définie et holomorphe sur la frontière  $\Gamma_{2n-1}$  d'un domaine  $D_{2n}$  de l'espace des  $n$  variables complexes, univalent et borné, elle est prolongeable dans tout le domaine  $D_{2n}$ . L'au. en donne une démonstration nouvelle en s'inspirant de travaux de R. Fueter (ce Zbl. 22, 58; 27, 57) et en utilisant une formule établie par lui-même (ce Zbl. 22, 240): si  $f(z_1, \dots, z_n)$  est holomorphe sur  $D_{2n} + \Gamma_{2n-1}$  et si  $(Z_1, \dots, Z_n)$  est un point intérieur à  $D_{2n}$ , on a:

$$(1) \quad f(Z_1, \dots, Z_n) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \frac{f(z_1, \dots, z_n) \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1} (\bar{z}_\alpha - \bar{Z}_\alpha) d_\alpha(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)}{\left[ \sum_{\alpha=1}^n (z_\alpha - Z_\alpha)(\bar{z}_\alpha - \bar{Z}_\alpha) \right]^n}$$

où  $d_\alpha(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  signifie la différentielle de degré  $2n-1$

$$dz_1 \dots dz_n d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_{\alpha-1} d\bar{z}_{\alpha+1} \dots d\bar{z}_n$$

dans laquelle manque l'élément  $d\bar{z}_\alpha$ . Soit  $\omega(Z_1, \dots, Z_n)$  l'élément différentiel de (1); l'au. considère l'intégrale

$$g(Z_1, \dots, Z_n, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \omega(Z_1, \dots, Z_n, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_n)$$

et montre successivement que a) à l'intérieur de  $\Gamma_{2n-1}$ , l'intégrale  $g$  ne dépend que des variables  $Z_p$  dont elle est une fonction analytique régulière — b) si le point  $(Z_1, \dots, Z_n)$  est extérieur à  $\Gamma_{2n-1}$ , la fonction est identiquement nulle. Il en résulte que  $g$  donne le prolongement de  $f$  dans tout  $D_{2n}$ . La démonstration de a) utilise d'une manière intéressante les propriétés de la dérivée extérieure d'une forme différentielle. — L'article contient une seconde démonstration du même théorème à partir de la formule de Cauchy ( $n=2$ ):

$$(2) \quad f(Z_1, Z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma} \frac{f(z_1, z_2) d(z_1, z_2)}{(z_1 - Z_1)(z_2 - Z_2)}.$$

La variété d'intégration  $\sigma$  est un cycle (tore) situé sur  $\Gamma_3$  et enlacé avec  $C_{Z_1}, C_{Z_2}$ , sections de  $\Gamma_3$  par les plans  $z_1 = Z_1$  et  $z_2 = Z_2$ . Bien que l'auteur se limite au cas où  $D_{2n}$  est convexe, la méthode suivie dans cette seconde démonstration offre un grand intérêt en rapprochant le théorème cité de Hartogs de questions de topologie encore peu élucidées et liées à l'emploi de (2).

P. Lelong (Grenoble).



**Severi, Francesco:** A proposito d'un teorema di Hartogs. *Comment. math. helv.* 15, 350—352 (1943).

L'au. rappelle un résultat obtenu par lui (ce *Zbl.* 4, 407), d'après lequel une fonction  $f(x_1, z_2)$ , analytique de la variable réelle  $x_1$  et de la variable complexe  $z_2 = x_2 + iy_2$ , supposée holomorphe sur une surface  $\Gamma$  frontière d'un domaine  $R$  de l'espace  $S(x_1, x_2, y_2)$  est prolongeable analytiquement dans tout l'intérieur de  $R$ . Il en déduit aisément une démonstration, déjà signalée par lui dans le travail cité, du théorème de Hartogs d'après lequel une fonction analytique  $f(z_1, \dots, z_n)$  holomorphe sur la frontière d'un domaine est prolongeable dans tout l'intérieur.

*P. Lelong (Grenoble).*

**Wachs, S.:** Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant. *J. Math. pures appl.*, IX s. 22, 25—54 (1943).

L'au. étudie selon une méthode de Bergmann les transformations pseudo-conformes d'un domaine  $\mathfrak{B}$  en un domaine  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}$  avec conservation d'un point frontière  $Q$ . L'hypothèse essentielle est qu'il existe deux dicylindres  $\mathfrak{J}$  et  $\mathfrak{A}$  (domaines de comparaison) tels que  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{J}$  et  $\mathfrak{A}$  ayant  $Q$  comme point frontière;  $\mathfrak{B}$  est de plus un domaine d'un type particulier (frontière constituée au voisinage de  $Q$  par une hypersurface analytique avec restrictions géométriques). Soit  $w(z)$  une transformation conforme du cercle  $|z| \leq 1$  qui laisse invariant le point  $z = 1$ ; s'il existe une suite de points  $z^{(n)}$  sur l'axe réel, tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{1 + w(z^{(n)})\} \{1 + z^{(n)}\}^{-1} = \Gamma$ , on a aussi (Julia):  $\{1 - |z|^2\} |1 + z|^{-2} \leq \Gamma \{1 - |w|^2\} |1 + w|^{-2}$ . Par substitution à la métrique hyperbolique de la métrique du dicylindre  $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$ , déduite de la fonction noyau de Bergmann, cette propriété s'étend (Bergmann, Méniatoff) aux transformations pseudo-conformes d'un dicylindre  $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$  en un domaine intérieur qui conservent un point frontière (situé ou non sur l'arête  $|z_1| = 1, |z_2| = 1$ ). L'au. s'appuie sur cette extension pour établir le résultat suivant: si une transformation pseudo-conforme de  $\mathfrak{B}$  en  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}$  conserve un point frontière  $Q$  non situé sur les arêtes des dicylindres  $\mathfrak{J}$  et  $\mathfrak{A}$  et transforme une suite de points  $[z_1^{(n)}, z_2^{(n)}] \rightarrow Q$  en une suite de points  $[w_1^{(n)}, w_2^{(n)}] \rightarrow Q$ , de manière que

$$L_1^{(n)} = F(z_1^{(n)})/F(w_1^{(n)}) \rightarrow \Gamma, \quad 0 < \Gamma < \infty,$$

on a aussi, au voisinage du point  $Q$ :

$$\Gamma \frac{F(z_1')}{|z_1'|^2} \geq \frac{F(w_1')}{|w_1'|^2} \quad \text{où} \quad F(u) = u + \bar{u} - u\bar{u}, \quad z_1' = \frac{z_1}{r_1}, \quad w_1' = \frac{w_1}{w_1 + r_1}$$

$r_1$  étant l'un des rayons du dicylindre intérieur  $\mathfrak{J}$ . — Une inégalité analogue mais de sens contraire est obtenue en faisant intervenir le dicylindre extérieur  $\mathfrak{A}$ . Enfin, en supposant de plus que la transformation change le domaine

$$C_{mpq}(z) = E \left[ 0 < z_1 + \bar{z}_1 < m, \frac{|z_1|}{z_1 + \bar{z}_1} < p, |z_2| < q \right]$$

en un domaine intérieur à un domaine  $C_{m'p'q'}(w)$  de même nature, l'au. montre que le jacobien de la transformation a un module borné supérieurement et inférieurement. Des résultats analogues sont donnés dans le cas où le point invariant  $Q$  se trouve sur les arêtes des dicylindres de comparaison  $\mathfrak{J}$  et  $\mathfrak{A}$ .

*P. Lelong (Grenoble).*

### Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

● **Conforto, Fabio:** Funzioni abeliane e matrici di Riemann. I. Roma, Libr. d. Univ. 1942. 304 pag.

Verf. setzt sich in diesen Vorlesungen das Ziel, unabhängig von der historischen Entwicklung aus dem Umkehrproblem die Theorie der allgemeinen Abelschen Funktionen völlig systematisch aufzubauen und insbesondere die Einführung der Thetafunktionen als zwangsläufige Folge der Definition der Abelschen Funktionen nachzuweisen. Dieses Programm ist bisher allgemein nicht verwirklicht worden; lediglich für  $p = 2$  ergab es sich aus den Arbeiten von Appell (1891) und Frobenius (1884). Die lückenlos systematische, klare und einfache Darstellung des Verf. ist daher um



so mehr zu begrüßen, als sie auch erstmalig die Geometrie der Abelschen Mannigfaltigkeiten weitgehend berücksichtigt. Man möchte dem ausgezeichneten Buch eine bessere Ausstattung und damit weitere Verbreitung wünschen.

Inhalt: I. Die Übergangsfunktionen und das Existenztheorem der Abelschen Funktionen. Eine eindeutige analytische Funktion  $f(u_1, u_2, \dots, u_p)$  heißt Abelsche Funktion, wenn sie periodisch mit  $2p$  unabhängigen Perioden  $\omega_{ik}$  ( $i = 1 \dots p; k = 1 \dots 2p$ ) ist, keine infinitesimalen Perioden zuläßt (also tatsächlich von  $p$  unabhängigen Veränderlichen abhängt) und meromorph ist. Die Riemannsche Periodenmatrix  $\Omega = (\omega_{ik})$  kann man sich dabei auf eine der bekannten Normalformen gebracht denken, etwa

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2\pi i, & 0, & \dots & 0, & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & 2\pi i, & \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pp} \end{pmatrix}.$$

Nach dem Cousinschen Satz folgt aus der Meromorphie die Darstellbarkeit von  $f(u)$  als Quotient zweier ganzer Transzendenter, der sog. Übergangsfunktionen  $\varphi(u), \psi(u)$ , deren gemeinsame Nullstellen nur in die Unbestimmtheitsstellen von  $f(u)$  fallen. Die Periodizität erfordert die Existenz ganzer Transzendenter  $g_h(u)$ , so daß

$$\varphi(u_1, \dots, u_h + 2\pi i, \dots, u_p) = \varphi(u_1, \dots, u_p) \exp g_h(u_1, \dots, u_p), \quad (h = 1 \dots p)$$

analog für  $\psi(u)$ . Sie genügen der Differenzengleichung

$$(1) \quad g_h(u) + g_k(u_1, \dots, u_h + 2\pi i, \dots, u_p) = g_k(u) + g_h(u_1, \dots, u_k + 2\pi i, \dots, u_p) + 2N_{hk}\pi i,$$

worin die ganzzahlig-schiefsymmetrische Matrix der  $N_{hk}$  durch  $f(u)$  allein bestimmt ist. Die Lösung von (1) gelingt mittels Bernoullischer Polynome nach einem Verfahren von Hurwitz. Ein analoges Differenzenproblem entsteht dann aus der Verwendung der weiteren  $p$  Perioden  $(\alpha_{ik})$  und ist durch Entwicklung in Fourierreihen zu erledigen. Im Endergebnis lassen sich  $\varphi(u), \psi(u)$  so ermitteln, daß

$$\varphi(u_1 + \omega_{1h}, \dots, u_p + \omega_{ph}) = \varphi(u_1, \dots, u_p) \cdot \exp \left\{ 2\pi i \left( \gamma_h + \sum_{s=1}^p \lambda_{sh} u_s \right) \right\},$$

analog für  $\psi$ , mit konstanten  $\gamma_h, \lambda_{sh}$  gilt. Die  $\lambda_{sh}$  ( $s = 1 \dots p; h = 1 \dots 2p$ ) bilden die sog. Perioden 2. Art, die  $\gamma_h$  ( $h = 1 \dots 2p$ ) die Parameter von  $f(u)$ , die ganzzahlige Determinante  $\delta = \begin{vmatrix} \omega_{ik} \\ \lambda_{ik} \end{vmatrix} \neq 0$  ( $i = 1 \dots p; s = 1 \dots p; k = 1 \dots 2p$ ) heißt Determinante der Übergangsfunktionen. — Die ganzen Zahlen  $m_{hk} = \sum_{s=1}^p (\omega_{sh} \lambda_{sk} - \omega_{sk} \lambda_{sh})$  ( $h, k = 1 \dots 2p$ ) bilden die

Charakteristik der  $\varphi(u), \psi(u)$ ; sie sind, ebenso wie  $\delta^2 = \|m_{hk}\|$ , gegenüber regulären linearen Transformationen der  $u$  unempfindlich;  $\delta$  ist invariant gegenüber unimodularen Substitutionen der Perioden von  $f(u)$ . Die Nichtexistenz infinitesimaler Perioden von  $f(u)$  bedingt, daß

(2)  $i \sum_{h,k=1}^{2p} m_{hk} \bar{x}_h x_k > 0$  sein muß für alle  $x_k \neq 0$ , die  $\sum_{k=1}^{2p} \omega_{ik} x_k = 0$  ( $i = 1 \dots p$ ) machen; setzt man  $\bar{M}_{hk}$  gleich dem algebraischen Komplement von  $m_{hk}$  in  $\|m_{hk}\|$ , wählt  $\mu_1 \dots \mu_p$  beliebig

und zerlegt  $\sum_{s=1}^{2p} \omega_{sk} \mu_s = X_s = X'_s + iX''_s$ , so ist (2) gleichbedeutend mit  $\sum_{h,k=1}^{2p} \bar{M}_{hk} X'_h X''_k < 0$ .  $M = \sum_{h,k=1}^{2p} M_{hk} x_h y_k$  ist eine Hauptform zu  $\Omega$ , indem man als solche eine Form bezeichnet, die

gleich 0 wird, wenn man  $x_h = \omega_{ih}, y_k = \omega_{jk}$  ( $i \neq j$ ) setzt, und  $\neq 0$  ist, wenn man mit den obigen Bezeichnungen  $x_h = X'_h, y_k = X''_k$  wählt. Es folgt der Existenzsatz der Abelschen Funktionen, wonach die Existenz einer Hauptform  $M$  zu  $\Omega$  kennzeichnend dafür ist, daß  $\Omega$  primitive Periodenmatrix einer Abelschen Funktion sei. Beweis nach Frobenius durch Reduktion der bilinearen alternierenden Form  $M$  mittels ganzzahliger unimodularer Substitution

auf die kanonische Gestalt  $\sum_{h=1}^p e_h (x_h y_{p+h} - x_{p+h} y_h)$ ,  $s \leq p$ . Umgekehrt lassen sich nämlich zu gegebenem  $\Omega$  und  $M$  die Zahlen  $m_{hk}, \lambda_{ik}$  bestimmen; durch lineare Transformationen läßt sich dabei stets erreichen, daß

$$(3) \quad M = \sum_{i=1}^p \delta_i (x_i y_{p+i} - x_{p+i} y_i), \quad \Omega = \begin{pmatrix} \frac{\pi i}{\delta_1} & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\pi i}{\delta_p} & a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{l\delta_p}{\pi i} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{l\delta_p}{\pi i} \end{pmatrix}$$



wird (Krazer), wobei  $a_{ik} = a_{ki}$  ist und  $\Re(a_{ik})$  die Koeffizienten einer negativ-definiten Form bilden. Dementsprechend ist die Bestimmung der Übergangsfunktionen identisch mit der der durch

$$\begin{aligned}\theta_n(u_1 \dots u_h + \pi i, \dots u_p) &= \theta_n(u_1 \dots u_p), \\ \theta_n(u_1 + a_{1h}, \dots u_p + a_{ph}) &= e^{-2\pi i u_h - n a_{hh}} \theta_n(u_1 \dots u_p)\end{aligned}$$

definierten Thetafunktionen  $n$ -ter Ordnung, die sich durch die bekannten Exponentialreihen darstellen lassen. Bei der Krazerschen Normalform ist der Ausdruck der allgemeinsten Übergangsfunktion  $\varphi(u) = \theta_1 \delta_p(u_1 + c_1 \dots u_p + c_p) \cdot \exp Q(u)$ , wobei  $c_1 \dots c_p$  beliebige Konstanten,  $Q(u)$  eine beliebige quadratische Form in  $u_1 \dots u_p$  sind, und aus ihnen läßt sich dann eine Abelsche Funktion mit den geforderten Eigenschaften zusammensetzen. — Die Gesamtheit der Abelschen Funktionen mit gegebenem  $\Omega$ ,  $M$  bildet einen Körper; er hängt von den  $\frac{1}{2}p(p+1)$  Moduln  $a_{ik}$  und den ganzen Zahlen  $\delta_1 \dots \delta_p$  ab. Für spezielle Moduln (singuläre Körper) können mehrere (statt einer) Hauptformen vorkommen, und dann treten ausartende Übergangsfunktionen mit  $\delta = 0$  auf.

II. Abelsche Mannigfaltigkeiten. Nach Vorgabe eines Abelschen Funktionenkörpers lassen sich stets in ihm  $t \geq p+1$  Funktionen  $f_\nu(u_1 \dots u_p)$ ,  $\nu = 1 \dots t$  bestimmen derart, daß die Gleichungen (4)  $x_\nu = f_\nu(u)$  eine algebraische  $V_p$  in  $S_t$  darstellen, die i. a. eindeutig auf das Periodenparallelotop beziehbar ist; sie heißt Picardsche Mannigfaltigkeit (P. M.); die Abelschen Funktionen des Körpers sind genau die rationalen Funktionen auf dieser  $V_p$ , weshalb alle Picardschen Mannigfaltigkeiten des Körpers birational identisch sind. Bezeichnet man als Abelsche Mannigfaltigkeit eine durch Abelsche Funktionen eines Körpers in der Form (4) darstellbare, so ist eine solche stets rationale Transformierte einer P. M. und umgekehrt, wird also durch eine irreduzible Involution auf der P. M. dargestellt. Die  $u_1 \dots u_p$  stellen auf der P. M.  $V_p$   $p$  linear unabhängige Picardsche Integrale 1. Gattung dar; jede P. M. gestattet zwei  $\infty^p$ -Scharen automorpher birationaler Transformationen 1. bzw. 2. Gattung, nämlich  $u' = -u + c$ ,  $u' = u + c$ ,  $c = (c_1 \dots c_p)$  konstant. Man kann stets ein projektives Modell der  $V_p$  wählen, das ausnahmslos eindeutig auf das Periodenparallelotop beziehbar ist; ist dann  $\varphi(u)$  eine nullstellenbehaftete, sonst beliebige Übergangsfunktion des Körpers, so stellt (5)  $\varphi(u) = 0$  auf dieser  $V_p$  eine algebraische  $V_{p-1}$  dar, und umgekehrt sagt der Satz von Appell-Humbert, daß jede algebraische  $V_{p-1}$  auf  $V_p$  in dieser Weise gewonnen werden kann. Ist  $\varphi(u)$  nicht ausgeartet, so gehört die durch (5) bestimmte  $V_{p-1}$  einem  $p$ -dimensionalen kontinuierlichen System solcher Mannigfaltigkeiten an. Die Gruppe der automorphen Transformationen 2. Gattung einer P. M. ist i. a. primitiv und kann nur im Falle singulärer Körper imprimitiv werden; damit hängt es zusammen, daß die Severische Basiszahl der P. M. eines nichtsingulären Körpers gleich 1 ist. Die P. M. für  $p = 2$  führt auf die Kummersche Fläche, der für  $p > 2$  die Wirtingersche  $V_p^{2p-1}$  entspricht. — Die Existenz einer Korrespondenz  $T$  auf der P. M.  $V_p$ , durch die  $P$  die Punkte  $P^{(1)} \dots P^{(\beta)}$  zugeordnet werden, bedingt die Existenz der  $2p^2$  Hurwitzschen Relationen (6)  $\sum_{h=1}^p \lambda_{ih} \omega_{hr} = \sum_{s=1}^{2p} a_{rs} \omega_{is}$ , ( $i = 1 \dots p$ ;  $r = 1 \dots 2p$ ), die sich geometrisch durch Homographien der Riemannschen Matrix deuten lassen. Hat  $V_p$  allgemeine Moduln, so läßt sich  $T$  auf die Form bringen  $\sum_{j=1}^p u_i^{q_j} + \gamma u_i \equiv c_i \pmod{\omega_{hi}}$ ,  $i = 1 \dots p$ , worin die ganze Zahl  $\gamma$  die Valenz von  $T$  bezeichnet. Die Aufgabe, auf  $V_p$  alle Involutionen zu bestimmen, die zur  $V_p$  selbst birational äquivalent sind, führt auf die Bestimmung aller  $[\alpha, 1]$ -Korrespondenzen auf  $V_p$ ; man erhält letztere bei allgemeinem Moduln aus den Kongruenzen  $u'_i \equiv -\gamma u_i + c_i \pmod{\omega_{hi}}$ ,  $i = 1 \dots p$  bei ganzzahligem  $\gamma \neq 0$  und  $c_i$  beliebig im Periodenparallelotop, dann ist  $\alpha = \gamma^{2p}$ . In ähnlicher Weise lassen sich die Korrespondenzen zwischen zwei verschiedenen P. M. beschreiben und mit Homographien zwischen den zugehörigen Riemannschen Matrizen in Verbindung setzen. Den Abschluß bildet der Picardsche Satz, daß eine algebraische  $M_p$ , die eine kontinuierliche, vollständig transitive, Abelsche  $p$ -parametrische Gruppe automorpher birationaler Transformationen gestattet, die P. M. eines Abelschen Funktionenkörpers ist.

Harald Geppert (Berlin).

**Petersen, Richard:** Über die Laplace-Transformation einer fastperiodischen Funktion. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 133—139 (1943) [Dänisch].

Verf. gibt einen neuen Beweis für den Satz von Bochner und Bohnenblust:

Ist  $f(t)$  eine fastperiodische Funktion mit der Fourierreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\lambda_n t)$  und liegen die  $\lambda_n$  nicht überall dicht auf der Zahlgeraden, so bestimmt die Laplace-Transformierte  $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$  eine in der ganzen  $z$ -Ebene mit Ausnahme der Punktmenge  $z = i\lambda_n$  und ihrer Häufungspunkte analytische Funktion; ist der Exponent  $\lambda_m$  isoliert, so



hat  $F(z)$  für  $z = i\lambda_m$  einen einfachen Pol mit dem Residuum  $A_m$ . Sind die  $\lambda_n$  insbesondere beschränkt, so gewinnt man hieraus den Satz von H. Bohr, demzufolge es eine ganze transzendente Funktion in der komplexen  $t$ -Ebene gibt, die für reelles  $t$  mit  $f(t)$  übereinstimmt.

Harald Geppert (Berlin).

Bohr, Harald: Ein Beispiel für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfsmittel in der mathematischen Analysis. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 29—33 (1943) [Dänisch].

Für den Satz aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen: „Hat eine Fourierreihe  $\sum A_n e^{i\lambda_n t}$  einer fastperiodischen Funktion  $f(t)$  linear unabhängige Exponenten, dann konvergiert nicht bloß die Reihe  $\sum |A_n|^2$ , sondern auch die Reihe  $\sum |A_n|$ , und die Fouriersche Reihe selbst ist gleichmäßig konvergent für alle  $t$ “, wird ein neuer Beweis mittels wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen gegeben. F. Knoll.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Cinquini, Silvio: Sopra un'osservazione del Signor Scorza-Dragoni su un problema per le equazioni differenziali ordinarie. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 11, 217—221 (1942).

Verf. bemerkt, daß eine kürzlich erschienene Arbeit von L. Brusotti (dies. Zbl. 28, 103) in Verbindung mit einer früheren Bemerkung des Verf. und einem Ergebnis von C. Miranda (dies. Zbl. 24, 22) einen elementaren Beweis des Brouwerschen Satzes über die stetigen Abbildungen liefert, und daß daher alle vom Verf. in den letzten Jahren (vgl. dies. Zbl. 27, 61) nach der Methode von C. Severini abgeleiteten Existenzsätze für die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Systemen solcher von beliebiger Ordnung sich durch Schlüsse beweisen lassen, die von topologischen Betrachtungen unabhängig sind. Schließlich bemerkt Verf., daß ein von G. Scorza Dragoni angegebener Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung [Atti Istit. Veneto Sci. etc. 101, 203—212 (1942)] sich als Spezialfall eines von ihm 1940 (dies. Zbl. 22, 339) bewiesenen Satzes ableiten läßt.

Sansone (Firenze).

Sansone, Giovanni: Le equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine, nel campo reale. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 11, 151—195 (1942).

Zunächst wird (Kap. I) unter anderem festgestellt, daß die allgemeinste gewöhnliche, lineare homogene (reelle) Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y^{(4)} + 4p_1 y^{(3)} + 6p_2 y^{(2)} + 4p_3 y' + p_4 y = 0$$

bei stetigen  $p_1''', p_2', p_3, p_4$  sich in die Form bringen läßt

$$(\gamma) \quad D(y) = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{dy}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0,$$

welche sich nur durch das Glied  $\omega y'$  von der allgemeinsten selbstadjungierten derartigen Differentialgleichung unterscheidet; ferner, daß  $(\gamma)$  ein System

$$(\delta) \quad y'' + p(x)y = q(x)z; \quad z'' + p(x)z = r(x)y + \omega(x)y'$$

entspricht. — Sodann werden (Kap. II) vermittels einer Identität (ähnlich der Dirichletschen im selbstadjungierten Fall) hinreichende Bedingungen bezüglich der Koeffizienten von  $(\gamma)$  angegeben dafür, daß die Lösungen von  $(\gamma)$  höchstens eine zweifache Nullstelle besitzen; für derartige  $(\gamma)$  wird ferner gezeigt, daß die (etwa vorhandenen) einfachen Nullstellen zweier linear unabhängiger Lösungen mit gemeinsamer zweifacher Nullstelle sich gegenseitig trennen. Anschließend wird eine spezielle Klasse von Differentialgleichungen  $(\gamma)$  angegeben, deren Lösungen, soweit sie nicht unendlich viele (gegen  $+\infty$  sich häufende) Nullstellen besitzen, mit  $x \rightarrow +\infty$  ihrem Betrage nach entweder gegen 0 oder gegen  $+\infty$  konvergieren. Und für eine Unterklasse davon wird gezeigt, daß jede beschränkte Lösung gegen Null konvergiert. — Nunmehr wird (Kap. III) eine zweite Identität (nach Art der Greenschen im selbstadjungierten Fall) hergeleitet und mit deren Hilfe eine Reihe von Vergleichssätzen gewonnen. Als Bei-



spiel nennen wir: Sind für die Koeffizienten zweier Differentialgleichungen  $(\gamma_1), (\gamma_2)$  gewisse Ungleichungen erfüllt, ist ferner  $y (\neq 0)$  eine Lösung von  $(\gamma_1)$  mit zweifachen Nullstellen in  $x_1$  und in  $x_2$ , sind schließlich  $u$  und  $v$  zwei linear unabhängige Lösungen von  $(\gamma_2)$ , welche in  $x_1$  gewissen (bilinearen) Differentialbedingungen genügen, so verschwindet in  $(x_1, x_2)$  mindestens eine der drei Determinanten  $(uv' - u'v)$ ,  $(uv'' - u''v)$ ,  $(u'v' - u''v)$ , falls an mindestens einer Stelle  $(uv' - u'v)(u'v'' - u''v') > 0$  ist. Verschärfungen ergeben sich für den Fall, daß z. B.  $(\gamma_2)$  selbstadjungiert ist. — Im letzten (IV.) Kapitel werden Differentialgleichungen  $(\gamma)$  betrachtet, deren Koeffizienten (außer von  $x$ ) noch in bestimmter Weise von einem (reellen) Parameter  $\lambda$  abhängen. Für solche Differentialgleichungen wird unter anderem der folgende Satz bewiesen: Ist ein Teilintervall  $[\alpha, \beta]$  des Definitionsintervalls von  $(\gamma)$  sowie ein Punkt  $x_1$  aus  $[\alpha, \beta]$  vorgegeben, so existiert ein  $\Lambda$  derart, daß für alle  $\lambda$  mit  $\Lambda \leq \lambda$  eine Lösung  $y$  von  $(\gamma)$  existiert, welche in  $x_1$  eine zweifache Nullstelle besitzt und welche in einem Punkte  $x_2$  aus  $[\alpha, \beta]$  einer der folgenden drei Bedingungen genügt:  $y(x_2) = y'(x_2) = 0$  oder  $y(x_2) = y''(x_2) = 0$  oder  $y'(x_2) = y''(x_2) = 0$ . Bezüglich der genaueren Formulierungen sowie bezüglich zahlreicher weiterer Ergebnisse muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Haupt (Erlangen).

Sansone, G.: Studio degli integrali del sistema  $y'' + py = qz, z'' + pz = ry + \omega y'$ . Ann. Mat. pura appl., IV. s. 22, 145—180 (1943).

Es handelt sich um Oszillationsbetrachtungen bezüglich der Lösungen  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  des im Titel genannten Differentialgleichungssystems. Dabei sind, soweit nichts anderes bemerkt sowie vorbehaltlich weiterer, jeweils anzugebender Forderungen,  $p, q, r$  bzw.  $\omega$  reelle stetige bzw. stetig differenzierbare Funktionen von  $x$  im betrachteten Definitionsbereich  $D$ . Unter den Ergebnissen seien die folgenden hervorgehoben: 1. Es sei  $D = (a < x)$ . Damit zwischen zwei benachbarten Nullstellen von  $y$  bzw. von  $z$  eine Nullstelle von  $z$  bzw. von  $y$  liegt, ist hinreichend, daß

$$q > 0, \quad \omega \leq 0, \quad W = \frac{1}{2}\omega' - r > 0 \quad \text{und} \quad V(x) = y'z - yz' + \frac{1}{2}\omega y^2 \geq 0.$$

2. Es sei  $D = [a, b]$ . Damit zwischen  $a$  und  $b$  mindestens eine Nullstelle des Produktes  $yz$  liegt, ist hinreichend: Es soll sein  $p > 0, q > 0, \omega < 0, W > 0, V(a) \geq 0$ ;

ferner sei  $z(a) : y(a) \leq \frac{1}{2} \int_a^b |\omega(t)| dt$ , falls  $y(a) \neq 0$ ; schließlich seien  $a$  und  $b$  Nullstellen

einer in  $(a, b)$  nicht verschwindenden Lösung  $w$  von  $w'' + pw = 0$ . Außer diesen hinreichenden Bedingungen werden noch zwei ähnliche angegeben. — 3. Asymptotisches Verhalten der Lösungen von (1) für  $x \rightarrow +\infty$  [wobei  $D = (a \leq x)$ ]. I. Damit entweder das Produkt  $yz$  für  $x \rightarrow +\infty$  unendlich viele Nullstellen besitzt oder  $\lim y = \lim z = 0$  sei, ist hinreichend: Es soll  $p \geq h > 0, k \geq q > 0$  sein ( $h, k$  Kon-

stanten);  $\omega \leq 0, W > 0, r \leq \omega + \omega', \int_0^{+\infty} |\omega(t)| dt < +\infty$ . Gilt außerdem  $V(e) \geq 0$

für ein  $e \geq a$ , so ist entweder  $\lim y = \lim z = 0$  oder  $y$  und  $z$  oszillieren beide unendlich oft. II. Im Falle  $p = 0$  ist dafür, daß entweder  $y$  und  $z$  für  $x \rightarrow +\infty$  je unendlich oft oszillieren mit je beliebig großen Nullstellen oder daß  $|y|$  und  $|z|$  mit  $x \rightarrow +\infty$  monoton gegen Null gehen, folgendes hinreichend:  $q > 0, \omega \leq 0, W > 0,$

$r < \omega', \int_a^{+\infty} q(x) dx = +\infty, \int_a^{+\infty} |r(x) - \omega'(x)| dx = +\infty, V(a) \geq 0$ . — Auch ein zweiter

ähnlicher Satz wird bewiesen. III. Im Falle  $p < 0, q > 0$  wird gezeigt:  $y$  und  $z$  oszillieren beide unendlich oft, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:  $p$  stetig differenzierbar,  $p' \leq 0, r < 0, \omega \leq 0, W > 0, V(a) \geq 0$ ; ferner soll für eine positive, wachsende Lösung  $w$  von  $w'' + pw = 0$  gelten:  $(\omega w^2)' \geq 0, (-r - \omega w w^{-1}) : \sqrt{-p} \geq J > 0, q : \sqrt{-p} \geq J > 0$  (wobei  $J$  Konstante). — 4. Betr. Abhängigkeit von einem Parameter  $\lambda$  (wobei  $a \leq x; 0 < \lambda_0 \leq \lambda$ ). Für den Fall, daß  $p, q, r, \omega$  von dem (reellen)



Parameter  $\lambda$  abhängen, werden hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß  $y = y(x, \lambda) = A \sin \lambda(x - b) + O(\lambda^{-1})$ ,  $z = z(x, \lambda) = C \sin \lambda(x - d) + o(1) + O(\lambda^{-1})$  (gleichmäßig in  $x$ ) für  $\lambda \rightarrow +\infty$  bei passenden Konstanten  $A, C, b, d$ . Die Bedingungen lauten im wesentlichen: Die Werte von  $y, y'$  und  $z, z'$  in  $a$ , für welche  $|y| + |y'| > 0$ ,  $|z| + |z'| > 0$  gelte, sollen beschränkt sein für alle  $\lambda$ ; es sollen  $|p - \lambda^2|, |q|, |r - \omega'_x|$  und  $|\omega|$  integrierbar sein über  $(a, +\infty)$ , und die Integrale der 3 ersteren Funktionen sollen für alle  $\lambda$  unterhalb  $1 : (1 + 2\lambda_0^{-1})$  bleiben, während das Integral von  $|\omega|$  für  $\lambda \rightarrow +\infty$  gegen Null geht. Haupt (Erlangen).

**Fan, Ky:** Une propriété asymptotique des solutions de certaines équations linéaires aux différences finies. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 169—171 (1943).

Es wird folgender Satz bewiesen: Gegeben sei die lineare Differenzengleichung  $k$ -ter Ordnung  $\Delta^k y(n) + g_{k-1}(n)\Delta^{k-1}y(n) + \dots + g_1(n)\Delta y(n) + g_0(n)y(n) = h(n)$ . Konvergieren die Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} h(n)$  sowie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-\kappa-1}|g_{\kappa}(n)|$ ,  $\kappa = 0, \dots, k-1$ , so existieren und sind gleich  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k - \kappa - 1)! n^{-k+\kappa+1} \Delta^{\kappa} y(n)$ ,  $\kappa = 0, \dots, k-1$ , für jede Lösung  $y(n)$  der gegebenen Differenzengleichung. [Für den Fall  $k \leq 2$  vgl. Verf., Bull. Soc. Math. France 70, 93 (1942).] Der Beweis verläuft ganz analog wie der des entsprechenden Satzes für Differentialgleichungen (vgl. Ref., dies. Zbl. 27, 61). Haupt.

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

● **Hoheisel, Guido:** Partielle Differentialgleichungen. 2., neubearb. Aufl. (Samml. Götschen. Bd. 1003.) Berlin: Walter de Gruyter & Cie. 1943. 123 S. geb. RM. 1.62.

Die erste Auflage ist im Jahre 1928 erschienen. In dieser zweiten, neubearbeiteten Auflage wird im allgemeinen derselbe Stoff mit gleichen Methoden behandelt. In Einzelheiten gibt es jedoch Veränderungen in der Stoffanordnung und -auswahl, die eine einheitlichere Darstellung der Theorie ermöglichen und ihre Anwendungsfähigkeit vergrößern. Der Stoff ist in vier Kapiteln (gegenüber sechs Kapiteln in der ersten Auflage) bearbeitet: I. Die Differentialgl. erster Ordnung mit zwei Veränderlichen. II. Die Differentialgl. erster Ordnung mit  $n$  Veränderlichen. III. Systeme mit einer und mehr unbekannten Funktionen. IV. Die Differentialgl. zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. In der neuen Stoffauswahl erscheinen einige Partien verkürzt oder weggelassen (Besondere Typen Differentialgl. erster Ordnung), andere sind dagegen neu zugefügt worden (Randwertaufgaben bei hyperbolischen Gleichungen, Bestimmte Integrale und Integration linearer Differentialgl. mit konstanten Koeffizienten). O. Borůvka (Brünn).

**Kamke, E.:** Bemerkungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. 49, 256—284 (1943).

Verf. behandelt zunächst die Differentialgleichung

$$(1) \quad p = f(x, y, z, q, \lambda), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \\ y = (y_1, \dots, y_n), \quad q_v = \frac{\partial z}{\partial y_v}$$

und beweist den Satz: bei gegebenem  $\lambda$  hat die Differentialgleichung (1) in dem Bereich  $|x - \xi| \leq \alpha$ ;  $y$  beliebig genau ein zweimal stetig differenzierbares Integral  $z = \psi(x, y, \lambda)$ , das für  $x = \xi$  die Werte  $\psi(\xi, y, \lambda) = \omega(y, \lambda)$  annimmt. Die Funktion  $\psi(x, y, \lambda)$  ist nebst den Ableitungen  $\psi_x$  und  $\psi_y$  in dem Bereich  $|x - \xi| \leq \alpha$ ,  $y$  beliebig,  $\lambda_{\mu} \leq \lambda_{\mu} \leq \lambda_{\mu}^*$   $k$ -mal stetig differenzierbar nach allen ihren  $n + m + 1$  Argumenten  $x, y_{\kappa}, \lambda_{\kappa}$ . — Dieser Satz wurde bereits von Ważewski aufgestellt (dies. Zbl. 14, 158) und mit Verwendung eines Hadamardschen Abbildungssatzes bewiesen. Demgegenüber gelingt in der vorliegenden Arbeit eine unmittelbare Beweisführung, die eine Ausdehnung einer Beweismethode darstellt, die Verf. im Spezialfall  $n = 1$



in seinem bekannten Lehrbuch (E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, insbes. S. 352 ff.) benutzt hat. — Sodann wird das Involutionssystem

$$(2) \quad p_\nu = f^\nu(x_1, \dots, x_r, \eta, z, q, \lambda) \quad (\nu = 1, \dots, r), \\ r > 1, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_s), \quad q = (q_1, \dots, q_s), \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

behandelt und der folgende Satz bewiesen: bei gegebenem  $\lambda$  hat das System (2) in dem Bereich  $|x_\nu - \xi_\nu| \leq \alpha$ ;  $\eta$  beliebig;  $A_\mu \leq \lambda_\mu \leq A_\mu^*$  (3) genau ein zweimal stetig differenzierbares Integral  $z = \psi(x_1, \dots, x_r, \eta, \lambda)$ , das für  $x_\nu = \xi_\nu$  die Werte  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_r, \eta, \lambda) = \omega(\eta, \lambda)$  annimmt. Die Funktion  $\psi(x_1, \dots, x_r, \eta, \lambda)$  ist nebst den Ableitungen  $\psi_{x_\nu}$  und  $\psi_{y_\nu}$  in dem Bereich (3)  $k$ -mal stetig differenzierbar nach allen ihren  $r + s + m$  Argumenten  $x_\nu, y_\nu, \lambda_\nu$ . — Mit weniger weitgehenden Aussagen wurde dieser Satz mit Hilfe der Mayerschen Transformation oder auch induktiv und schließlich auch mit Hilfe der Charakteristikentheorie für Systeme (2) von E. Goursat, L. Bieberbach und C. Carathéodory bewiesen. Demgegenüber werden hier Aussagen über mehrmalige Differenzierbarkeit und Abhängigkeit der Integrale von Parametern mitbewiesen und insbesondere explizite Angaben eines Existenzbereichs formuliert. Die Mayersche Methode führt auch bei dem von L. Bieberbach angegebenen Beispiel  $p_1 = z + q$ ,  $p_2 = z + q$  zum Ziel. — Weiterhin wird die lineare Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^n f^\nu(x, \eta, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = f^0(x, \eta, \lambda)z + g(x, \eta, \lambda), \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n), \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

behandelt und der Satz bewiesen: für beliebige  $\xi, \lambda$  aus den Intervallen  $a \leq \xi \leq b$ ,  $A_\mu \leq \lambda_\mu \leq A_\mu^*$  hat die Differentialgleichung (4) in dem Bereich  $a \leq x \leq b$ ,  $\eta$  beliebig genau ein Integral  $z = \psi(x, \eta; \xi, \lambda)$  mit dem Anfangswert  $\psi(\xi, \eta; \xi, \lambda) = \omega(\eta, \lambda)$ . — Dieses Integral ist in dem Bereich  $a \leq x, \xi \leq b$ ,  $\eta$  beliebig,  $A_\mu \leq \lambda_\mu \leq A_\mu^*$   $k$ -mal stetig differenzierbar nach allen  $m + n + 2$  Argumenten  $x, \xi, y_\nu, \lambda_\nu$ . Sind  $y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) die charakteristischen Funktionen des Differentialgleichungssystems  $y'_\nu(x) = f^\nu(x, \eta, \lambda)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) (d. h. die Integralkurven eben dieses Systems, die durch den Punkt  $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n$  gehen), so ist das Integral durch die Parameterdarstellung

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \quad (\nu = 1, \dots, n), \\ z = e^F \left\{ \omega(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \int_\xi^x g(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \lambda) e^{-F} dx \right\}$$

mit

$$F = F(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \int_\xi^x f^0(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \lambda) dx$$

und den Parametern  $\eta_1, \dots, \eta_n$  gegeben. — Zum Beweise dieses Satzes wird das Integral der Differentialgleichung (4) nach der klassischen Methode konstruiert, indem durch jeden Punkt  $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n$ ,  $\xi = \omega(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$  eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichung gelegt und gezeigt wird, daß sich diese Charakteristiken bei festem  $\xi$  zu einer Integralfäche zusammenschließen. — Für Involutionssysteme

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial x_\mu} = \sum_{\sigma=1}^r f^{\mu\sigma}(x_1, \dots, x_r, \eta, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_\sigma} + f^{\mu 0}(x_1, \dots, x_r, \eta, \lambda)z + g^\mu(x_1, \dots, x_r, \eta, \lambda), \\ r > 1, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_s), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (\mu = 1, \dots, r)$$

wird bewiesen: für beliebige  $\xi_\mu, \lambda$  aus den Intervallen  $a_\mu \leq \xi_\mu \leq b_\mu$ ,  $A_\nu \leq \lambda_\nu \leq A_\nu^*$  hat das Differentialgleichungssystem (5) in dem Bereich  $a_\mu \leq x_\mu \leq b_\mu$ , ( $\mu = 1, \dots, r$ ),  $\eta$  beliebig genau ein Integral  $z = \psi(x_1, \dots, x_r, \eta, \lambda)$  mit den Anfangswerten  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_r, \eta, \lambda) = \omega(\eta, \lambda)$ . Dieses Integral ist in dem Bereich  $a_\mu \leq x_\mu \leq b_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, r$ );  $\eta$  beliebig;  $A_\nu \leq \lambda_\nu \leq A_\nu^*$  nach allen  $r + s + m$  Argumenten  $x_\nu, y_\nu, \lambda_\nu$



$k$ -mal stetig differenzierbar. — Zum Schluß kritisiert Verf. in sehr bemerkenswerter Weise die in der einschlägigen Literatur angegebenen Regeln zur Bildung vollständiger Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen. Ist  $f^{\mu k}(x_1, \dots, x_n)$  das Koeffizientensystem eines solchen Differentialsystems, so erhalten wir z. B. für  $m=n=2$

die Matrix  $\begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$ . Setzen wir  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  und

$$\begin{aligned} f^{11} &= |x|^3 + x^3, & f^{12} &= |y|^3 + y^3, \\ f^{21} &= |y|^3 - y^3, & f^{22} &= |x|^3 - x^3, \end{aligned}$$

so entsteht für  $x > 0, y > 0$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2x^3 & 2y^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und für  $x < 0, y < 0$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2y^3 & 2x^3 \end{pmatrix}.$$

Im ersten Falle darf die zweite und nur die zweite Zeile des Differentialgleichungssystems gestrichen werden, im zweiten Falle die erste und nur die erste. Betrachtet man die Matrix und das zugehörige Differentialgleichungssystem in der ganzen  $x, y$ -Ebene oder bei Vermeidung von singulären Stellen in der längs der negativen  $y$ -Achse aufgeschnittenen Ebene, so kann das System, obwohl der Rang überall  $< 2$  ist, nicht durch Streichen einer Zeile reduziert werden. Dem in der Literatur vielfach angegebenen Verfahren zur Bildung reduzierter vollständiger Systeme kommt hier nach keine Allgemeingültigkeit zu. — Jedem der hier angeführten Sätze und Ergebnisse schickt Verf. stets noch eine sorgfältigst formulierte Präzisierung aller notwendigen Voraussetzungen über Koeffizienteneigenschaften, Integrabilitätsbedingungen (bei Systemen) usw. voraus.

M. Pinl (Braunschweig).

Vessiot, Ernest: Sur les équations aux dérivées partielles de premier ordre, considérées comme des équations de contact et, en particulier, sur l'intégration des équations semi-linéaires. Ann. Ecole norm., III. s. 59, 211—273 (1942).

Soit une équation de contact d'un espace ponctuel  $E$  à  $(n+1)$  dimensions:  $E) \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) = 0$ . Les éléments de contact de cette équation satisfont à  $E$ ) et à:  $p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_{n+1} dx_{n+1} = 0$ . Intégrer  $E$ , c'est en rechercher les intégrales, c.-à-d. toute multiplicité dont les éléments de contact appartiennent à  $E$ , p. ex. une multiplicité ponctuelle  $\mathfrak{M}_s$  (à  $s$  dimensions): telle que

$$(1) \quad x_{s+k} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_s)$$

$$dx_{s+k} = \sum_{\sigma} \frac{\partial f_k}{\partial x_{\sigma}} dx_{\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s; k = 1, 2, \dots, r = n+1-s)$$

et par suite

$$(2) \quad p_h + \sum_e \frac{\partial f_e}{\partial x_h} p_{s+e} = 0. \quad (\rho = 1, 2, \dots, r; h = 1, 2, \dots, s)$$

La condition pour que cette multiplicité  $\mathfrak{M}_s$  soit une intégrale de  $E$  est donc que  $E$  soit, relativement aux  $p_i$  et sur  $\mathfrak{M}_s$  [c.-à-d. sous le bénéfice de (1)] une conséquence de (2); c.-à-d. que (2) soit, sur  $\mathfrak{M}_s$ , un sous-système de  $E$  (en  $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ ). — En particulier, s'il s'agit d'une surface intégrale  $S$  ( $s=n, r=1$ ) définie par  $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , (2) se réduisent à

$$p_h + \frac{\partial f}{\partial x_h} p_{n+1} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

et la condition pour que  $S$  soit intégrale de  $E$  est que la coordonnée  $x_{n+1}$  considérée sur  $S$  comme fonction des autres coordonnées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , soit solution de l'équation aux dérivées partielles  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_s, x_{s+1}; \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_s}, -1) = 0$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les équations aux dérivées partielles} \\ \varphi\left(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right) = 0, \\ \text{et les équations de contact} \\ \varphi\left(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; -\frac{p_1}{p_{n+1}}, \dots, -\frac{p_n}{p_{n+1}}\right) = 0 \end{array} \right.$$

ont mêmes surfaces intégrales.

Si la surface intégrale est définie par une équation non résolue:  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ , les coordonnées d'orientation de ses éléments à contact sont  $p_i = m \frac{\partial f}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ),

de sorte que la condition cherchée est que l'équation  $\Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right) = 0$  soit vérifiée sur  $S$ ; d'où au point de vue des surfaces intégrales, association entre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'équation aux dérivées partielles} \\ \Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right) = 0, \\ \text{et l'équation de contact} \\ \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; p_1, \dots, p_{n+1}) = 0. \end{array} \right.$$

La 1<sup>ère</sup> partie du Mémoire de l'aut. traite de la recherche — non plus des surfaces intégrales d'une équation de contact  $E$  donnée —, mais de ses multiplicités  $\mathfrak{M}_s$  ( $s < n$ ). Problème décomposable en deux: a) Trouver les systèmes de fonctions:

$$(3) \quad z_{k,h} = \Psi_{k,h}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, r; h = 1, 2, \dots, s)$$

tels que les équations

$$(4) \quad p_h + \sum_e z_{e,h} p_{s+e} = 0$$

forment, relativement aux  $p_i$  un sous-système de  $E$ , soit pour toute position du point  $x$  (sol. générales), soit seulement pour les points  $x$  de certaines multiplicités  $\omega$  (sol. spéciales). b) Pour chaque solution du problème a) trouver les multiplicités du système différentiel

$$(5) \quad \frac{\partial x_{s+k}}{\partial x_h} = z_{k,h}$$

s'il s'agit d'une solution générale; et s'il s'agit d'une solution spéciale, celles du système mixte formé des équations (5) et de celles de la multiplicité  $\omega$  afférente à cette solution.

Le problème a) est de nature algébrique; on écrira que l'équation:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; -\sum_e z_{e,1} p_{s+e}, \dots, -\sum_e z_{e,s} p_{s+e}, p_{s+1}, \dots, p_{n+1}\right) = 0$$

est une identité en  $p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_{n+1}$ . L'aut. donne de ce problème (a) l'interprétation géométrique suivante: Considérant les lettres  $p_i$  comme des coordonnées homogènes dans un espace ponctuel projectif  $\pi: E$   $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) = 0$  est l'équation d'une surface-image  $\Phi$ . Les équations (4):  $p_h + \sum_e z_{e,h} p_{s+e} = 0$

( $h = 1, 2, \dots, s$ ) représentent, avec des coefficients  $z_{a,b}$  arbitraires, les équations générales de droites, c.-à-d. de multiplicités linéaires à  $(r-1)$  dimensions. Toute solution (3) du système  $Z$  aura donc pour image dans  $\pi$  une droite  $\Delta_{r-1}$ , située sur  $\Phi$ , qui sera dite générale ou spéciale, dans les mêmes conditions que cette solution. — Le problème a) consistera donc à chercher les droites  $\Delta_{r-1}$  de la surface  $\Phi$ ; ces droites pourront être isolées ou former des familles continues suivant que le système  $Z$  sera lui-même déterminé ou indéterminé. — Le problème b) est un problème de calcul intégral: Dire qu'une multiplicité  $\mathfrak{M}_s$  définie par les équations (1) satisfait à



un système  $\frac{\partial x_{s+h}}{\partial x_h} = z_{h,h}$ , où les  $z_{h,h}$  sont certaines fonctions (3), c'est dire que les équations:  $\frac{\partial f_h}{\partial x_h} = z_{h,h}$  sont vérifiées sur cette multiplicité. Cela exprime qu'elle admet les  $s$  transformations infinitésimales:

$$P_h = p_h + \sum_{q=1}^s z_{e,h} p_{s+e} \quad (h = 1, 2, \dots, s)$$

Le problème (b) consiste donc à chercher les intégrales totales des faisceaux (F) de transformations infinitésimales ayant pour bases  $P_1, P_2, \dots, P_s$ ; et l'aut. le traite comme application de sa théorie des faisceaux de transformations infinitésimales («Sur une théorie nouvelle des problèmes d'intégration» [Bull. Soc. Math. France 52, 336 (1924)]). — La 2<sup>ème</sup> partie du mémoire étudie les intégrales complètes d'une équation de contact, c.-à-d. les familles de multiplicités — à un même nombre quelconque  $s$  de dimensions —, telles que l'ensemble des éléments de contact de toutes les multiplicités de la famille soit identique à celui des éléments de contact de  $E$  [pour  $s = n$ , se retrouve l'intégrale complète de Lagrange, relative aux équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre]; et il établit que la connaissance d'une intégrale complète, à un nombre quelconque de dimensions, entraîne l'intégration d'une équation de contact quelconque et fournit ses caractéristiques. — La 3<sup>ème</sup> partie du mémoire traite des équations de contact semi-linéaires. Sophus Lie avait déjà donné le nom de semi-linéaires aux équations aux dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre:  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$  qui admettent une intégrale complète à  $s$  dimensions ( $1 < s < n$ ), les équations linéaires étant celles pour lesquelles  $s = 1$ ; puis remarqué qu'une équation semi-linéaire définit, dans l'espace  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  [ $x_1, x_2, \dots, x_n; z$  étant considérées comme des constantes paramétriques] une surface réglée, c.-à-d. engendrée par des multiplicités linéaires. — Par analogie et extension, l'A. nomme une équation de contact  $E$  semi-linéaire d'espèce  $(s-1)$  si elle a au moins une intégrale complète à  $s$  dimensions, et dit qu'elle l'est au sens strict si cette intégrale complète est primitive, c.-à-d. si les intégrales particulières qui la composent ne sont pas engendrées par des multiplicités faisant partie d'une autre intégrale complète à un nombre moindre de dimensions. Cherchant à reconnaître si une équation  $E$  est semi-linéaire d'espèce  $(s-1)$  et à trouver, dans l'affirmative, toutes ses intégrales complètes à  $s$  dimensions, il établit que la surface-image  $\Phi$  de  $E$  devra être engendrée par  $\infty^{s-1}$  droites à  $(n-s)$  dimensions; ces génératrices ayant, pour équations:

$$0 = p_h + \sum_{e=1}^s S_{e,h}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{s-1}) p_{s+e} \quad (h = 1, 2, \dots, s)$$

il faudra reconnaître si le faisceau:

$$\mathfrak{F} = \left\{ X_1, X_2, \dots, X_s, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}} \right\}$$

a des intégrales complètes à  $s$  dimensions, et les trouver s'il y en a. — Quelques résultats généraux tirés de l'application de la théorie des faisceaux sont établis; et une étude détaillée est faite des cas les plus abordables:  $s = 2$ ,  $s = 3$  (en particulier en ce qui concerne les équations  $E$  à coefficients constants): plusieurs exemples d'équations de contact semi-linéaires (dont les surfaces-images sont, par exemple, une quadrique réglée, la développable engendrée par les tangentes à une cubique gauche...) sont donnés et poursuivis jusqu'à l'intégration définitive. — L'introduction au mémoire fournit elle-même un résumé très clair et très complet des résultats acquis au cours du mémoire.

Christiane Pauc (Nantes).

Ostrowski, Alexandre: Sur les transformations réversibles d'éléments de ligne. Acta math. 75, 151—182 (1943).

Die in dieser Arbeit betrachteten umkehrbaren Transformationen von Linien-elementen, die sogenannten Transformationen  $R$ , sind folgendermaßen definiert: Es

sei (1)  $y_v = y_v(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$  ( $p_v = dx_v/d\tau$ ,  $v = 1, \dots, n$ ) eine solche Transformation, wobei die Funktionen  $y_v$  stetige Ableitungen in bezug auf die  $x_v$ ,  $p_v$  besitzen und in bezug auf die  $p_v$  homogen vom Grade 0 sind. Bildet man die Ableitungen der Funktionen  $y_v$  nach dem Parameter  $\tau$  und setzt man  $q_v = dy_v/d\tau$ , so folgen durch Elimination der  $p_v$  und ihrer Ableitungen Gleichungen von der Form (2)  $x_v = x_v(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n)$ , wobei die Funktionen  $x_v$  in bezug auf die  $q_v$  homogen vom Grade 0 sind, und analog folgen aus (2) die Gleichungen (1). Für  $n=2$  fallen die Transformationen  $R$  mit den Berührungstransformationen zusammen; für  $n > 2$  gilt dies nur dann, wenn es sich um Punkttransformationen handelt. Den Ausgangspunkt für die Betrachtungen des Verf. bildet die Erkenntnis, daß für eine Transformation  $R$  die beiden Jacobischen Determinanten  $D(y_1, \dots, y_n)/D(p_1, \dots, p_n)$ ,  $D(x_1, \dots, x_n)/D(q_1, \dots, q_n)$  denselben Rang  $k$  besitzen, wobei  $k \leq n/2$  ist. Daraus folgt unmittelbar die Existenz von  $2k$  in bezug auf die  $p_v$  und  $q_v$  vom Grade 0 homogenen Funktionen  $r_\kappa(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ ,  $s_\kappa(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n)$ ,  $\kappa = 1, \dots, k$ , mit der Eigenschaft, daß die  $y_v$ ,  $s_\kappa$  nur von den  $x_v$ ,  $r_\kappa$  und zugleich die  $x_v$ ,  $r_\kappa$  nur von den  $y_v$ ,  $s_\kappa$  abhängen. Dadurch wird also eine nichtsinguläre Punkttransformation  $R^*$ , die sogenannte charakteristische Transformation von  $R$ , zwischen den  $(n+k)$ -dimensionalen Räumen  $(x_1, \dots, x_n, r_1, \dots, r_k)$ ,  $(y_1, \dots, y_n, s_1, \dots, s_k)$  eindeutig bestimmt. Das vom Verf. gelöste Hauptproblem besteht nun darin, inwieweit durch eine beliebige nichtsinguläre Transformation  $R^*$  zwischen den zwei  $(n+k)$ -dimensionalen Räumen eine Transformation  $R$  mit der charakteristischen Transformation  $R^*$  bestimmt ist. Es zeigt sich, daß im Falle  $k = n/2$  der Transformation  $R^*$  gewisse Unabhängigkeitsbedingungen auferlegt werden müssen, damit es solche Transformationen  $R$  gibt, und sodann ist  $R$  durch  $R^*$  eindeutig bestimmt. Im Falle  $k < n/2$  dagegen gibt es zu einer gegebenen Transformation  $R^*$  immer Transformationen  $R$  mit charakteristischer Transformation  $R^*$ , wenn nur die die Transformation  $R^*$  definierenden Funktionen stetige zweite Ableitungen besitzen.

O. Borůvka (Brünn).

Schouten, J. A., und W. van der Kulk: Beiträge zur Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen. 8. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 52, Nr 5, 195—200 (1943) [Holländisch].

Es wird eine Normalform abgeleitet für Systeme von  $q$  Pfaffschen Gleichungen in  $n$  Variablen. Ist  $n-q$  ungerade, so besteht diese Normalform aus  $q$  Gleichungen von der Klasse  $n-q$ , im anderen Falle dagegen aus  $q-1$  Gleichungen von der Klasse  $n-q+1$  und einer Gleichung von der Klasse  $2(n-q)-1$ . Zum Schluß werden einige Beziehungen zwischen den wichtigsten arithmetischen Invarianten des Systems angegeben. — Für die früheren Mitt. vgl. dies. Zbl. 22, 343; 23, 40, 229; 27, 315.

Autoreferat.

Whitehead, S.: An approximate solution for the distribution of temperature or potential with cylindrical isothermal or equipotential surfaces. Proc. phys. Soc., Lond. 54, 63—65 (1942).

Für ein System symmetrisch angeordneter Kugeln, dieses als elektrostatisches oder Wärmeleitungsproblem aufgefaßt, führt (nach Russell, 1911) iterative Abbildung nach reziproken Radien konvergent zu den gesuchten Äquipotentialflächen, als deren nullte Näherung die Kugeloberflächen selbst zu nehmen sind. Beim ebenen Problem, verwirklicht etwa als Schnitt durch symmetrisch gelegene, unendlich lange Zylinder, besteht Konvergenz, wenn überhaupt, nur in bezug auf den Betrag der Ladungen oder Wärmehalte, während das Vorzeichen alterniert. Dadurch sieht Verf. es nahegelegt, die Lösung der Laplaceschen Dgl. für das ebene, symmetrische Problem aus symmetrisch verteilten Dipolen aufzubauen, wobei die genaue Verteilung der Quellen und Senken auf gleiche Art schrittweise angenähert wird wie bei Russell. Für ein weiter vereinfachtes Beispiel wird eine erste Näherung geometrisch konstruiert. Im Falle von Unsymmetrie oder bei weniger idealisierten Randbedingungen, als Verf. sie annimmt, müssen kräftigere Verfahren herangezogen werden.

v. Guérard.



**Rellich, Franz:** Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten. Jber. Dtsch. Math.-Verein. 53, Abt. 1, 57—65 (1943).

Verf. beweist zwei Sätze, die über das Verhalten der Lösungen von (1)  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten bei Annäherung an das Unendliche Aufschluß geben. Satz 1: Ist  $u(x_1, \dots, x_h)$  ( $u \not\equiv 0$ ) für  $r > \varrho_0$  ( $r^2 = x_1^2 + \dots + x_h^2$ ) eine zweimal stetig differenzierbare, komplexwertige Lösung von (1) ( $\lambda > 0$ ), so gibt es eine Zahl  $p > 0$ , so daß für alle genügend großen  $\varrho$  die Ungleichung  $\iint_{\varrho_1 < r < \varrho} |u|^2 d\tau \geq p\varrho$  gilt ( $\varrho_1 > \varrho_0$ , sonst

beliebig; das Integral ist  $h$ -dimensional). Aus diesem Satz folgt der Unitätssatz: Es gibt im Äußeren einer geschlossenen, ganz im Endlichen gelegenen Fläche  $F$  höchstens eine wie in Satz 1 beschaffene Lösung von (1) ( $\lambda > 0$ ), die auf  $F$  vorgeschriebene Werte

annimmt und die Beziehung  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{h-1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i\sqrt{\lambda} u \right) = 0$  erfüllt. Das ist für  $h=3$  die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung; im Gegensatz zu Magnus (dies. Zbl. 27, 316) kommt also Verf. ohne die Bedingung „ $ru$  beschränkt“ aus. — Während Satz 1 allseitige Annäherung an das Unendliche gestattet, behandelt Satz 2 einseitige Annäherung; er lautet im wesentlichen so: Es sei  $G$  ein Gebiet des Raumes  $x_1, \dots, x_h$ , das sich ins Unendliche erstreckt und von einer (ebenfalls unendlichen) Randfläche  $F$  mit stückweise stetiger Normale berandet sei. Jede Ebene  $x_h = \varrho$  zerlege bei hinreichend großem  $\varrho$   $G$  in zwei Teile, von denen der eine,  $G_\varrho$ , im Endlichen liegt und die Punkte  $x_h < \varrho$  von  $G$  umfaßt. Weiter bilde die Außennormale zu  $F$  nirgends mit der positiven  $x_h$ -Richtung einen Winkel kleiner als  $90^\circ$ . Ist dann  $u$  eine wie in Satz 1 beschaffene Lösung von (1) ( $\lambda$  reell), die auf  $F$  verschwindet, so gibt es eine Zahl  $p > 0$  und eine gegen  $\infty$  strebende Folge positiver Zahlen  $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ , so daß  $\iint_{G_{\varrho_n}} |u|^2 d\tau \geq p\varrho_n$

( $n = 1, 2, \dots$ ) ist. An einem Beispiel wird gezeigt, daß auf die Winkelbedingung für die Normale nicht verzichtet werden kann. — Aus Satz 2 wird ebenfalls ein Unitätssatz hergeleitet. Maruhn (Berlin).

**Sommerfeld, A.:** Die ebene und sphärische Welle im polydimensionalen Raum. Math. Ann. 119, 1—20 (1943).

$\Delta_p$  bezeichne den Laplaceschen Operator im  $(p+2)$ -dimensionalen Raume; betrachtet werden die Lösungen der Schwingungsgleichung (1)  $\Delta_p u + k^2 u = 0$ . Im Falle  $p=1$  ist die einfachste Lösung die ebene Welle  $u = \exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta)$ , für die die bekannte Entwicklung gilt:

$$(1) \quad e^{ikr \cos \theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n J_{n+1/2}(kr) P_n(\cos \theta).$$

Durch Mittelbildung über  $\theta$  folgt hieraus

$$(2) \quad J_0(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+1) J_{2n+1/2}(kr) [P_{2n}(0)]^2,$$

bzw. durch die gleiche Mittelung nach vorheriger Multiplikation mit

$$(2\pi)^{-1} \exp\left(in\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$(3) \quad J_\nu(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+2\nu+1) J_{2n+\nu+1/2}(kr) \frac{(2n)!}{(2\nu+2n)!} [P_{2n+\nu}^\nu(0)]^2.$$

Analog kann man im  $(p+2)$ -dimensionalen Raume vorgehen; die Lösung vom Charakter der ebenen Welle läßt sich analog zu (1) entwickeln:

$$(4) \quad e^{ikr \cos \theta} = \left(\frac{2}{kr}\right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{p}{2}\right) i^n J_{n+p/2}(kr) C_n^{p/2}(\cos \theta),$$

worin die  $C_n^{p/2}$  die durch die Identität (5)  $(1 - 2tx + t^2)^{-p/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n C_n^{p/2}(x)$  erklärten Gegenbauerschen Polynome sind. Auf gleichem Wege wie oben findet man aus (4):

$$(6) \quad J_0(kr) = \left(\frac{2}{kr}\right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{p}{2}\right) i^n J_{n+p/2}(kr) M_n,$$

$$(7) \quad J_\nu(kr) = \left(\frac{2}{kr}\right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{p}{2}\right) i^{n-\nu} J_{n+p/2}(kr) N_n,$$

worin  $M_n, N_n$  die aus (5) durch Konturintegration zu ermittelnden Mittelwerte:

$$(8) \quad M_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_n^{p/2}(\cos \theta) d\theta = \begin{cases} \Gamma^2\left(\frac{n+p}{2}\right) \Gamma^{-2}\left(\frac{n+2}{2}\right) \Gamma^{-2}\left(\frac{p}{2}\right) & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$(9) \quad N_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_n^{p/2}(\cos \theta) e^{i\nu\theta} d\theta = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(s + \frac{p}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{p}{2} + \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)^2 \Gamma(s+1) \Gamma(s+\nu+1)} & \text{für } n = \nu + 2s, s > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bedeuten. Ist  $p$  nicht ganzzahlig, so sind die durch (5) erklärten  $C_n^{p/2}$  sog. „allgemeine Kugelfunktionen“ (Nielsen); die Beziehungen (8), (9) bleiben erhalten. — Die Darstellung (4) der ebenen Welle läßt sich als Grenzfall der Reihenentwicklung einer sphärischen Welle auffassen; sie lautet:

$$(10) \quad (kR)^{-p/2} J_{p/2}(kR) = 2^{p/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) k^{-p} (rr_0)^{-p/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{p}{2}\right) J_{n+p/2}(kr) J_{n+p/2}(kr_0) C_n^{p/2}(\cos \theta),$$

wobei linker Hand  $R^2 = r_0^2 + r^2 + 2rr_0 \cos \theta$  zu setzen ist; sie entsteht durch Kombination zweier analoger Entwicklungen für aus- bzw. einstrahlende Kugelwellen, in denen links  $J_{p/2}(kR)$  und rechts  $J_{n+p/2}(kr_0)$  durch die Hankelschen Funktionen  $H^1$  bzw.  $H^2$  gleicher Ordnung und gleichen Argumentes zu ersetzen sind. Auf (4) führt der Grenzübergang  $r_0 \rightarrow \infty$ . Der Beweis der Entwicklung (10) wiederum entspringt einer allgemeinen, vom Verf. früher [Jber. Deutsch. Math.-Verein. **21**, 309—359 (1912)] gegebenen Darstellung der Greenschen Funktion der polydimensionalen Schwingungsgleichung nach deren axialsymmetrischen Eigenfunktionen. *Harald Geppert.*

### **Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:**

Riesz, Friedrich, und Béla v. Sz. Nagy: **Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes.** Acta Sci. Math. Szeged **10**, 202—205 (1943).

Es wird bewiesen: Ist  $T$  ein linearer Operator im Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$  mit der Eigenschaft  $\|Tf\| \leq \|f\|$  für jedes  $f$  in  $\mathfrak{H}$ , so haben  $T$  und sein adjungierter Operator  $T^*$  dieselben Fixelemente. *E. Hopf* (Leipzig).

Wavre, R.: **L'itération directe des opérateurs hermitiens et deux théories qui en dépendent.** Comment. math. helv. **15**, 299—317 (1943).

Soit  $A$  un opérateur hermitien de l'espace de Hilbert  $H$ . Pour un élément quelconque  $x_0$  de  $H$  tel que les itérés  $A^r x_0$  ( $r=1, 2, \dots$ ) existent, on définit les nombres  $l_r \geq 0$  et les éléments  $x_r$  par récurrence au moyen de l'équation:  $A^r x_0 = l_1 l_2 \dots l_r x_r$  avec  $\|x_r\| = 1$  ( $r=0, 1, 2, \dots$ ). On a toujours  $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \dots$ ; par conséquent  $l = \lim l_r$  existe,  $l \leq \infty$ . Si  $l_1 \neq 0$ , c.-à-d. si  $A x_0 \neq 0$ , posons  $\bar{\omega}(x_0) = \frac{l_1}{l} \cdot \frac{l_2}{l} \cdot \frac{l_3}{l} \dots$ ;  $0 \leq \bar{\omega}(x_0) \leq 1$ . On montre que si  $\bar{\omega}(x_0) \neq 0$ , alors la suite  $x_{2q}$  converge fortement vers un certain élément  $x$  de  $H$ , tandis que si  $\bar{\omega}(x_0) = 0$ , alors cette suite n'est pas compacte, bien qu'elle converge faiblement vers 0. Si  $A$  est borné, la fonction  $\omega(x_0)$



se trouve définie pour tout  $x_0$  de  $H$  tel que  $Ax_0 \neq 0$ . Dans ce cas, l'élément  $x$  correspondant à  $x_0$  [tel que  $\bar{\omega}(x_0) \neq 0$ ], sera un élément propre de l'opérateur  $A^2$  appartenant à la valeur propre  $l^2$ . On en déduit que  $l$  est une fréquence de  $A$ , c.-à-d. qu'au moins un des nombres  $l$  et  $-l$  est une valeur propre de  $A$ . — Si  $A$  est un opérateur complètement continu (c. c.), on a  $\bar{\omega}(x_0) \neq 0$  pour tout  $x_0$  tel que  $Ax_0 \neq 0$ . Dans ce cas, on obtient le développement d'un élément quelconque  $f$  ( $f \neq 0$ ) en une série d'éléments propres par le procédé suivant. Soit  $f_0^0 = f$  et posons

$$\begin{aligned} f_0^0 &= \bar{\omega}(f_0^0)f_0^0 + f_0^1 & \text{avec} & & f^0 &= \lim f_{2q}^0, & l^0 &= l(f_0^0), \\ f_0^1 &= \bar{\omega}(f_0^1)f_0^1 + f_0^2 & & & f^1 &= \lim f_{2q}^1, & l^1 &= l(f_0^1), \end{aligned}$$

etc. On montre que  $l^0 > l^1 > \dots$ ; le procédé s'arrêtant dès qu'on arrive à un reste  $h = f_0^{n+1}$  tel que  $Ah = 0$ , sinon il se répète sans limite. En ajoutant ces équations, on obtient le développement

$$f = \sum_{i=0}^n \bar{\omega}(f_0^i)f_i^i + h \quad (n \text{ fini ou infini}),$$

les  $f_i^i$  étant des éléments propres de  $A^2$  appartenant respectivement aux valeurs propres  $(l^i)^2$  et  $h$  étant tel que  $Ah = 0$ . — Un procédé analogue s'applique aussi aux opérateurs  $A$  non-c. c., mais réguliers dans le sens qu'ils sont bornés et que  $\bar{\omega}(x_0) \neq 0$  lorsque  $Ax_0 \neq 0$ . Le spectre d'un tel opérateur est purement discontinu et tel que tout ensemble de fréquences contient une plus grande fréquence. En prenant les fréquences par ordre décroissant quelconque, chaque fréquence aura donc une suivante, sans avoir nécessairement de précédente.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

**Wavre, Rolin:** Remarques à propos de l'itération des opérateurs hermitiens. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques ets. 24) 59, 229—233 (1942).

Compléments à une étude antérieure des opérateurs hermitiens que l'Au. appelle «réguliers» (ce Zbl. 26, 412 et 27, 228). Si  $A$  est un tel opérateur, tout vecteur  $f$  se décompose en une somme  $\sum_{\alpha} b_{\alpha} f_{\alpha} + h$ , où les  $f_{\alpha}$  sont les éléments propres de  $A^2$ , deux à deux orthogonaux, les indices  $\alpha$  parcourant un ensemble dénombrable bien ordonné;  $h$  est orthogonal à tous les  $f_{\alpha}$ , et on a  $A(h) = 0$ ; les coefficients  $b_{\alpha}$  s'obtiennent par application de la méthode d'itération, répétée transfiniment; la condition  $h = 0$  est évidemment équivalente à  $\sum_{\alpha} b_{\alpha}^2 = 1$  d'après le théorème de Parseval. —

Pour un opérateur hermitien quelconque  $A$ , et un vecteur  $x_0$ , soit  $x_n = A^n(x_0) / \|A^n(x_0)\|$ ,  $l_n = \|A^n(x_0)\| / \|A^{n-1}(x_0)\|$ ; la suite des  $l_n$  est croissante; l'Au. montre que, pour que sa limite  $l$  soit finie, il faut et il suffit que la série  $\sum_{i=0}^{\infty} \|x_{i+2} - x_i\|^2$  soit convergente.

J. Dieudonné (Nancy).

**Wold, Herman:** On infinite, non-negative definite, hermitian matrices, and corresponding linear equation systems. Ark. Mat. Astron. Fys. 29 A, Nr 19, 1—13 (1943).

Let  $H = \|h_{ik}\|$  be an infinite positive definite hermitian matrix. Determine the matrices  $A(n) = \|a_{ik}(n)\|$  and  $G(n) = \|g_{ik}(n)\|$  by the conditions  $a_{ik}(n) = g_{ik}(n) = 0$  for  $k > i$  if  $i \leq n$  and for all  $k$  if  $i > n$ ,  $a_{ii}(n) = 1$  for  $i \leq n$ ,  $A^*(n)H = G(n)$ . Then  $D(n) = A^*(n)HA(n)$  is a diagonal matrix. If  $n \rightarrow \infty$ , then  $D(n)$  and  $G(n)$  converge (by elements), let their limits be  $D = \|d_{ik}\|$  and  $G = \|g_{ik}\|$  respectively. Put  $b_{ik} = g_{ik}/d_{ii}$  if  $d_{ii} \neq 0$  and  $b_{ik} = 0$  if  $d_{ii} = 0$ , then we have  $G = DB$  with  $B = \|b_{ik}\|$ . The matrix  $R = B^*G = B^*DB$  is non-negative definite hermitian, and so is  $S = H - R$  too. In the decomposition  $H = R + S$  the „regular“ component  $R$  is in certain respects similar to finite matrices. The „singular“ component  $S$  vanishes in particular if  $H$  is row-finite, or of the form  $H = K^*K$  with a row-finite  $K$ , or if there exist constants  $m$  and  $M$  such that  $0 < m \leq \sum_{i,k=1}^n h_{ik} \bar{x}_i x_k \leq M < \infty$  for  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). — This decomposition is then applied to the study of linear equation systems  $\sum_{k=1}^{\infty} h_{ik} x_k = c_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), or briefly  $Hx = c$ . As a characteristic result we cite the following

one: If  $c'_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}(n)} c_k$  and  $c''_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \overline{b_{ki}} c'_k$  exist, and if  $x$  satisfies certain conditions (in particular if  $\sum_i \sqrt{h_{ii}} |x_i| < \infty$ ), then a necessary and sufficient condition that  $x$  be a solution of  $Hx = c$  is that  $x$  be a solution of the simultaneous system  $Gx = c'$ ,  $Sx = c - c''$ .  
*Béla de Sz. Nagy* (Szeged).

**Pitt, H. R.:** Random processes in a group. J. London Math. Soc. **17**, 88—98 (1942).

Soient  $G$  un groupe topologique abélien séparable et  $\Sigma$  un corps borelien formé de sous-ensembles de  $G$  ( $G \in \Sigma$ ). Soit d'autre part  $T$  un corps d'ensembles abstraits. On dit qu'une fonction de répartition pour  $G$  et  $T$  est définie, lorsqu'on a défini, pour chaque  $\tau \in T$ , une mesure  $f(g, \tau)$  dans  $G$  (avec un système d'ensembles mesurables comprenant  $\Sigma$ ) de manière que ces mesures vérifient certaines conditions. Considérons maintenant le champ  $E$  des fonctions  $\chi(\tau)$  définies sur  $T$ , prenant leurs valeurs dans  $G$  et additives au sens restreint. Le résultat principal est alors le théorème suivant: Etant donnée une fonction de répartition  $f(g, \tau)$  pour le corps  $T$  et le groupe  $G$ , on peut définir une mesure sur  $E$  de manière que, quels que soient les ensembles  $\tau_j \in T$  et  $g_j \in \Sigma$ , l'ensemble des fonctions  $\chi(\tau)$  telles que  $\chi(\tau_j) \in g_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) soit mesurable. De plus, si les  $\tau_j$  sont disjoints, la mesure de cet ensemble est égale à  $\prod f(g_j, \tau_j)$ . — Cas particuliers: fonctions aléatoires additives d'intervalles et suites aléatoires.  
*Ky Fan* (Paris).

### Praktische Analysis:

● **Zimmermann, Ludwig:** Vollständige Tafeln der Quadrate aller Zahlen bis 100 009. 4. Aufl. (Samml. Wichmann.—Fachbücherei f. Vermessungswes. u. Bodenkult. Bd. 8.) Berlin-Grünwald: Herbert Wichmann 1941. XIX, 187 S.

Die Tafeln enthalten die vollständigen Quadrate der Zahlen 1,0000 bis 10,0009 mit Angabe der Differenzen. Die Quadrate der Zahlen 1 bis 1009 sind nochmals in einer besonderen Tafel zusammengestellt. Ferner sind Tafeln der Kuben der Zahlen 1 bis 1000 und der vollständigen 4. bis 9. Potenzen der Zahlen 1 bis 99 beigegeben. Der Gebrauch der Tafeln, insbesondere auch zum Wurzelziehen und Multiplizieren, wird ausführlich erläutert.  
*Wassiliy Höfding* (Berlin).

**Zeuli, Tino:** Al di là della „Tavola Pitagorica“. Period. Mat., IV. s. **22**, 165—172 (1942).

Beschreibung der Neperschen und der Génaille-Lucasschen Rechenstäbchen (vgl. Enzyklop. Math. Wiss. I 2, 956).  
*G. Hajós* (Budapest).

**Martin, Otto:** Ein Iterationsverfahren zur graphischen Lösung von Regelungsaufgaben. Wiss. Veröff. Siemens-Werk. **21**, 239—245 (1943).

Verfahren zur näherungsweisen Integration von Systemen simultaner Differentialgleichungen, wie sie bei der mathematischen Behandlung der Regelungstechnik auftreten. Gegenüber analytischer Behandlung in geschlossener Form bietet dieses Verfahren folgende Vorteile: erhebliche Zeitersparnis, da anderenfalls bei  $n$  simultanen D.gln.  $n^2$  Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten zu lösen sind; Möglichkeit einfacher Berücksichtigung von Unstetigkeiten und anderen Besonderheiten des Regelungsvorganges, welche sich durch D.gln. mit konstanten Koeffizienten nicht erfassen lassen. Stetiger Übergang zwischen Näherungsannahmen für Extremfälle, z. B. für das unterschiedliche Bewegungsgesetz für hydraulische Regelgetriebe bei großer bzw. kleiner Steuerschieberauslenkung. — Im Vergleich zu bekannten Verfahren zur mechanischen Integration von D.gls.-Systemen wird die Möglichkeit herausgearbeitet, die verschiedenen Integrale in getrennten, einander anschließenden Teilen jedes Zeitintervalls zu bestimmen. Wird die Anzahl der zu bestimmenden Integrale zu groß (von 3 ab), so wird die Summe dieser Unterintervalle als Integrationsintervall zu groß und die Rechnung zu ungenau. Für diesen Fall wird eine weitere Iteration angegeben, welche sich dem Grundverfahren überlagert und die Integrale in ihrem Gesamtverlauf alternierend annähert.  
*v. Guérard*.



# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Fortet, Robert: Sur la notion de fonction aléatoire. Rev. scient. 79, 135—139 (1941).

$t$  désignant une variable indépendante (le temps), on considère d'abord des fonctions aléatoires au sens restreint  $X(t)$  de  $t$  dont la valeur est déterminée par le hasard, le hasard intervenant à des instants  $t_1, t_2, \dots$  en nombre fini ou en infinité dénombrable, fixés d'avance, ou eux-mêmes déterminés par le hasard. Slutsky (ce Zbl. 17, 26) a introduit d'une façon explicite les fonctions aléatoires au sens large, en imaginant que, pour la détermination de  $X(t)$ , le hasard intervienne d'une façon permanente (voir aussi Bernstein-Slutsky-Steinhaus, ce Zbl. 22, 243). Conformément à cette conception, il faudrait imaginer un «observateur idéal» en mesure d'observer  $X(t)$  à tous les instants d'un intervalle  $T_1 \leq t \leq T_2$  donné. L'a. considère les notions de continuité stochastique, de fonction presque sûrement continue et d'autres qui se rattachent au point de vue de Slutsky. Il cherche à construire une «fonction effective»  $Y(t)$  correspondant à  $X(t)$ ; les problèmes relatifs à  $Y(t)$  ne doivent pas être essentiellement différents de ceux relatifs aux fonctions aléatoires au sens restreint. B. Hostinský (Brünn).

Silva, Giovanni: Una generalizzazione del problema delle concordanze. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 100, Pt 2, 689—709 (1941).

Verf. verallgemeinert das schon von den Begründern der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung untersuchte Konkordanzproblem zu folgender Aufgabe: Eine Urne enthält  $rn$  Kugeln, von denen jeweils  $r$  die Zahlen  $1, 2, \dots, n$  tragen; nacheinander werden in  $rn$  Ziehungen (ohne Zurücklegen) alle Kugeln gezogen, wobei die Ziehungen immer von 1 bis  $m$  numeriert und dann wieder von 1 beginnend bis  $m$  gezählt werden usf. Konkordanz liegt vor, wenn die Nummer der gezogenen Kugel mit der Nummer der Ziehung übereinstimmt. Unter der Voraussetzung  $rn = sm$  ( $s$  ganz) werden die Wahrscheinlichkeit  $P^{(c)}$  für das Eintreffen von genau  $c$  Konkordanzen und weitere sich aus dieser herleitende Wahrscheinlichkeiten exakt berechnet, Näherungsausdrücke für  $P^{(c)}$  bei großem  $n$  bzw.  $r$  angegeben und Spezialfälle, und zwar der Fall  $r = s = 1$ , das klassische Problem ( $m = rn$ ) und der Fall  $r = s \neq 1$  behandelt. M. P. Geppert.

Jessen, Børge: Eine Aufgabe über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 72—75 (1943) [Dänisch].

K. Pearson hat folgende Aufgabe gestellt: Ein Mann macht vom Punkte  $O$  aus nacheinander  $n$  Schritte der Längen  $a_1, \dots, a_n$ ; bei jedem Schritt sind alle Richtungen gleich wahrscheinlich; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $P(r; a_1, \dots, a_n)$ , daß sich der Mann nach den  $n$  Schritten von  $O$  um weniger als  $r$  entfernt hat? Es ist bekanntlich nach Kluver [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 8, 341—350 (1906)]

$$(*) \quad P(r; a_1, \dots, a_n) = r \int_0^\infty J_1(rx) J_0(a_1 x) \dots J_0(a_n x) dx.$$

Setzt man  $W_k = P(a_k; a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , so gilt die merkwürdige Beziehung  $\sum_{k=1}^n W_k = 1$ . Sie folgt entweder aus dem Zusammenhang dieses Problems mit dem der einem trigonometrischen Polynom entsprechenden mittleren Bewegung nach H. Weyl [Amer. J. Math. 60, 889—896 (1938); dies. Zbl. 19, 334] oder durch direkte Ausrechnung mittels (\*) oder, wie es Verf. hier tut, unmittelbar aus der Wahrscheinlichkeitstheoretischen Deutung durch Induktion nach  $n$ . Harald Geppert.

Daniels, H. E.: The probability distribution of the extent of a random chain. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 244—251 (1941).

Verf. behandelt folgende Aufgabe: Eine Kette, bestehend aus  $N$  Gliedern der Länge  $a$  kann auf einer Geraden beliebige Lagen einnehmen. Unter gewissen Gleich-

wahrscheinlichkeitsvoraussetzungen berechnet Verf. die Wahrscheinlichkeit  $p_N(\varrho)$  dafür, daß die Kette dabei die Ausdehnung  $\varrho a$  habe (wo diese als die kürzeste auf der Geraden gelegene Strecke zu verstehen ist, welche die ganze Kette umschließt),

$$p_N(\varrho) = \Delta_\varrho^2 F_N(\varrho) / 2^N$$

mit

$$F_N(\varrho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sum_{\lambda=0}^{\varrho} \sum_{x=0}^{\varrho} U_{N, x-\lambda+k\varrho},$$

$$U_{r,x} = r! \cos^2 \frac{(r+x)\pi}{2} \left/ \left[ \left( \frac{r}{2} - \frac{x}{2} \right)! \left( \frac{r}{2} + \frac{x}{2} \right)! \right] \right.,$$

den Erwartungswert von  $\varrho$  und für großes  $N$  die Grenzverteilung und die entsprechenden Momente. Die Ergebnisse werden auf Ketten im dreidimensionalen Raum ausgedehnt; für großes  $N$  zeigt die entsprechende Grenzverteilung, daß die Ausdehnungen der Kette in je zwei zueinander senkrechten Richtungen asymptotisch unabhängig voneinander verteilt sind.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

### **Statistik:**

● **Boldrini, Marcello: Statistica. Teoria e metodi.** Milano: Antonino Giuffrè 1942. XXIV, 1126 pag. L. 120.—

Mit dem vorliegenden Werk hat Verf. ein sehr originelles, wertvolles und handliches statistisches Lehr- und Handbuch geschaffen. Auf rund 1000 Seiten gelingt es dem Verf., einem der bewährtesten Statistiker Italiens, durch zwanzigjährige Lehrtätigkeit in diesem Fache hierfür besonders geeignet, eine organische Darstellung der gesamten Statistik zu geben, wobei die philosophisch-erkenntnistheoretischen Grundlagen derselben ebenso erörtert werden wie die rein technischen Hilfsmittel und Apparaturen einerseits und die mathematisch-statistische Methodik andererseits. Der besondere Wert des Buches liegt in der gut gelungenen organischen Synthese und Verschmelzung der in den letzten Jahrzehnten hauptsächlich von der italienischen Schule gepflegten und bereicherten beschreibenden Methodik mit der vorwiegend von der englischen Schule entwickelten wahrscheinlichkeitstheoretisch unterbauten Test-Methodik. Im Stoff findet auch die moderne Literatur weitgehende Berücksichtigung, selbstverständlich allerdings unter Bevorzugung der bereits bewährten und gefestigten Methoden und Verzicht auf noch nicht bewährte oder voraussichtlich kurzlebige Einzelbeiträge der letzten Zeit. Zahlenbeispiele aus allen Gebieten runden die Darstellung ab. Jedem Kapitel ist ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis beigegeben. Inhalt: Teil I: Theorie der Statistik. Kap. 1: Begriff. Kap. 2: Geschichte der Statistik. Kap. 3: Phasen der wissenschaftlichen Forschung, Hypothese. Kap. 4: Untersuchungsplan und Datenbildung, statistische Tabellen und Diagramme. Kap. 5: Die empirischen Gesetze der Erscheinungen. Kap. 6: Technische Hilfsmittel. Teil II: Statistische Methodik. Kap. 7: Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Kap. 8: Prinzip der kleinsten Quadrate. Kap. 9: Subjektives, typisches arithmetisches Mittel. Kap. 10: Empirische Mittelwerte. Kap. 11: Rationale Streuungsmessung und Theorie der statistischen Gruppen (u. a. Student-Verteilung, Streuungszerlegung). Kap. 12: Empirische Streuungsmaße (u. a. mittlere Differenz, Konzentration). Kap. 13, 14: Darstellung statistischer Verteilungen (u. a. Interpolation, Ausgleichung, Methode der kleinsten Quadrate, orthogonale Polynome,  $\chi^2$ -Kriterium). Kap. 15: Rationale Messung des Zusammenhanges quantitativer statistischer Merkmale (u. a. Korrelation, Regression, Korrelationsverhältnis, partielle Korrelation, Intraclass-Korrelation und Streuungszerlegung). Kap. 16: Empirische Maße der statistischen Zusammenhänge. Kap. 17: Statistische Verhältniszahlen. Kap. 18: Bernoullisches Theorem und Dispersionstheorie. Kap. 19: Fehlerquellen bei statistischen Untersuchungen. Anhang: 1. Tafel der Quadrate, Kuben, Quadrat-, Kubikwurzeln, Logarithmen und reziproken Werte der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000; 2. Tafel der Krampschen Transzendenten; 3. Tafel



der Funktionswerte der Normalverteilung; 4. Tafel des Integrals  $\int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$ ,

5. Tafel der Studentschen  $t$ -Verteilung (in den die Tabellen erläuternden Integralformeln sowie in den entsprechenden Formeln im Text einige entstellende Schreibfehler); 6. Tafel der zur Grenzwahrscheinlichkeit  $P = 0,05$  bzw.  $0,01$  gehörigen Fisherschen  $z$ -Werte nach Freiheitsgraden; 7. Tafel (ebenso wie 6. aus R. A. Fisher übernommen) der  $\chi^2$ -Verteilung; 8. Paretos Tafel der Tschebyscheffschen Polynome.

*M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

● **Koller, Siegfried: Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. 2., erg. Aufl.** Dresden u. Leipzig: Theodor Steinkopff 1943. X, 73 S., 15 Taf. u. 6 Abb. geb. RM. 10.—.

Die theoretischen Fortschritte der mathematischen Statistik kommen der praktischen Anwendung statistischer Methoden nur mit großer Verzögerung zugute. Man begnügt sich bei der Beurteilung der zufälligen Streuung empirischer statistischer Zahlen noch immer mit einfachen Abschätzungen aus der Fehlerrechnung, arbeitet mit der Annahme normaler Verteilung und verwendet Formeln, die nur asymptotisch für große Beobachtungsreihen gelten, auch im Falle weniger Beobachtungen. Die vorliegenden Tafeln erleichtern den Zugang zu wertvollen Ergebnissen der neueren Statistik, indem sie es ermöglichen, für viele, praktisch wichtige Fälle den Zufallsbereich statistischer Zahlen, auch für geringen Umfang des Beobachtungsmaterials, durch einfache Ablesungen an Skalen zu bestimmen. Die meisten dieser Tafeln sind hier zum ersten Male veröffentlicht. Der Inhalt (vgl. die Besprechung der 1. Auflage [dies. Zbl. 22, 248]) ist in der 2. Auflage nur geringfügig geändert; im Vorwort weist Verf. einige Kritiken der 1. Auflage zurück. Weite Verbreitung dieser Tafeln wäre zu wünschen, damit das Niveau der statistischen Betrachtungen sich hebt; durchgreifende Besserung wird man allerdings erst von einem Lehrbuch erwarten können. — Druck und Ausstattung der Tafeln sind vorzüglich; das Satzbild würde durch kursiven Druck der Formelzeichen gewinnen.

*J. Bartels* (Potsdam).

**Knoll, F.: Über Näherungsverfahren bei empirisch gegebenen Verteilungsfunktionen und damit verbundene Korrekturformeln.** Dtsch. Math. 7, 187—194 (1943).

Verf. behandelt die Interpolation empirisch gegebener Verteilungen durch Polynome. Die diesen Annahmen entsprechenden Näherungsverteilungsgesetze sowie die zugehörigen Korrekturformeln werden abgeleitet. Als einfachster Sonderfall ergibt sich die bekannte „Sheppardsche Korrektur“ der Streuung.

*Fuhrich* (Prag).

**Ottestad, Per: On Bernoullian, Lexis, Poisson and Poisson-Lexis series.** Skand. Aktuarie Tidskr. 1943, 15—67.

Verf. erweitert in dieser Arbeit die Lexissche Dispersionstheorie, indem er einerseits neue Kriterien aufstellt, um zu prüfen, ob eine Beobachtungsreihe dem einen oder anderen Typus angehört, und andererseits Reihentypen in Betracht zieht, die allgemeiner als die üblicherweise behandelten sind. — In einer Serie von  $n$  unabhängigen Versuchen möge in  $x$  Fällen ein bestimmtes Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  eingetreten sein. Insgesamt werden  $N$  Versuchsserien vorgenommen, wobei  $n$  zunächst in allen Serien gleich sei. Je nachdem, ob  $p$  in allen  $nN$  Versuchen gleich bleibt oder innerhalb jeder Serie gleich bleibt, aber sich von Serie zu Serie ändert oder in jeder Serie sich in gleicher Weise von Versuch zu Versuch ändert, bilden die  $x$  eine Bernoullische, eine Lexissche oder eine Poissonsche Reihe. Bedeutet  $\sigma_{(r)}(x)$  das faktorielle Moment  $r$ -ter Ordnung von  $x$ ,  $\delta_r(x) = \sigma_{(r)}(x)/\sigma_{(r-1)}(x)$ ,  $p_0$  den Mittelwert von  $p$  und  $n^{(r)} = n(n-1) \dots (n-r+1)$ , so gilt, wie Verf. zeigt, in den Beziehungen

$$\frac{\sigma_{(r)}(x)}{n^{(r)}} \geq p_0^r, \quad \delta_r(x) \geq \delta_1(x) - (r-1)p_0 \quad (r = 2, 3, \dots)$$

das obere, mittlere oder untere Zeichen je nachdem, ob der Lexissche, der Bernoullische oder der Poissonsche Fall vorliegt (für den letzteren wird der Beweis nur für  $r = 2$

und  $r = 3$  erbracht). — Ändert sich  $n$  von Serie zu Serie, so betrachtet Verf.  $n$  als Zufallsveränderliche. In diesem Fall ist, wenn  $\sigma_r(u)$  bzw.  $m_r(u)$  das auf den Nullpunkt bzw. auf den Mittelwert bezogene Moment  $r$ -ter Ordnung von  $u$  bedeutet, die Größe  $[\sigma_1(n)^2 m_2(x) - \sigma_1(x)^2 m_2(n)] / \sigma_1(n) \sigma_1(x) [\sigma_1(n) - \sigma_1(x)]$  (die für festes  $n$  in das Quadrat des Divergenzkoeffizienten übergeht)  $\geq 1$  je nachdem, ob eine Lexissche, eine Bernoullische oder eine Poissonsche Reihe vorliegt. Dabei wird im Lexisschen Fall auch  $p$  als Zufallsvariable aufgefaßt und vorausgesetzt, daß  $n$  und  $p$  unabhängig sind. Andererseits zeigt Verf., daß immer dann Grund zu der Annahme besteht, daß eine Lexissche Reihe mit nicht unabhängigen  $n$  und  $p$  vorliegt, wenn  $\sigma_1\left(\frac{x}{n}\right)$  wesentlich von  $\sigma_1(x)/\sigma_1(n)$  oder der Korrelationskoeffizient  $r_{1,1}(x, n)$  wesentlich von  $[\sigma_1(x)/\sigma_1(n)]\sqrt{m_2(n)/m_2(x)}$  verschieden ist. — Neben den drei klassischen Reihentypen betrachtet Verf. noch Reihen folgender Art, die er Poisson-Lexissche nennt. Die Wahrscheinlichkeit  $p$  sei eine Funktion von zwei Größen  $q$  und  $c$ , wo  $q$  sich nur von Serie zu Serie ändert, aber innerhalb jeder Serie gleichbleibt, während  $c$  in jeder Serie von Versuch zu Versuch die gleiche Änderung erfährt. Verf. beschränkt sich auf die Fälle  $p = q + c$  und  $p = qc$ . Sind  $q_0$  bzw.  $c_0$  die Mittelwerte von  $q$  bzw.  $c$ , so gilt bei festem  $n$

$$(1) \quad m_2(x) = n(q_0 + c_0)(1 - q_0 - c_0) + n(n-1)m_2(q) - nm_2(c) \quad \text{für } p = q + c,$$

$$(2) \quad m_2(x) = nq_0c_0(1 - q_0c_0) + n(n-1)c_0^2m_2(q) - nq_0^2m_2(c) - nm_2(q)m_2(c) \quad \text{für } p = qc.$$

Setzt man in (1)  $c = 0$  bzw.  $q = 0$  oder in (2)  $c = 1$  bzw.  $q = 1$ , so erhält man die bekannten Formeln für den Lexisschen bzw. Poissonschen Fall. Man sieht, daß beide Typen von Poisson-Lexisschen Reihen normale, unternormale oder übernormale Dispersion aufweisen können, doch wird der letzte Fall am häufigsten auftreten, nämlich immer dann, wenn  $m_2(q) > 0$  und  $n$  genügend groß ist. Auch die Fälle, daß  $n$  eine von  $q$  unabhängige bzw. abhängige Zufallsvariable ist, werden behandelt.

*Wassilij Höfding* (Berlin).

**Martinotti, Pietro:** Di alcune recenti medie. Acta Pontif. Acad. Sci. 5, 113—121 (1941).

Verf. gibt zunächst einen kurzen Hinweis auf die verschiedenen zusammenfassenden mathematischen Mittelwertdefinitionen, erörtert dann die Abhängigkeit des als

$$m = F[f(a_1), \dots, f(a_n)]$$

oder durch

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \varphi(m, \dots, m)$$

gegebenen Mittelwertes  $m$  von der Reihenfolge der zu mittelnden Werte  $a_i$  im Falle einer unsymmetrischen Funktion  $F$  oder  $\varphi$  und führt zwei Beispiele „trigonometrischer“ Mittelwerte, bei welchen  $\varphi$  eine trigonometrische Funktion des arithmetischen Mittels ist, aus der Physik an.

*M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

**Busk, Thøger:** Einige Bemerkungen über die Berechnung des mittleren Fehlers von Werten, die mit der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen sind. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 40—44 (1943) [Dänisch].

Für den mittleren Fehler eines Ausdrucks  $k_1x + k_2y + k_3z + \dots$  ( $x, y, z, \dots$  stochastische, nicht unabhängige Veränderliche) wird in der üblichen Bezeichnung ( $Q_i$ , Lagrangesche Multiplikatoren) der Ausdruck

$$\bar{m}_2(k_1x + k_2y + k_3z \dots) = (k_1^2Q_{11} + k_2^2Q_{22} + k_3^2Q_{33} + 2Q_{12}k_1k_2 \dots)\bar{m}_2$$

gewonnen. Bei Korrelatenausgleichung wird die Benützung der Formel

$$\left[\frac{e'e'}{v}\right] = \left[\frac{ee}{v}\right] - \left[\frac{ep}{v}\right]L_1 - \left[\frac{eq}{v}\right]L_2 \dots$$

(übliche Bezeichnungsweise) empfohlen und für  $\bar{m}_2(k_1u_1 + k_2u_2)$  ein entsprechender Ausdruck angegeben.

*F. Knoll* (Wien).



**Burrau, Øyvind:** Der mittlere Fehler als Unsicherheitsmaß. *Mat. Tidskr. B* 1943, 9—16 (1943) [Dänisch].

Nach einer knappen kritischen Untersuchung der klassischen Fehlertheorie wird auf das „Student“-sche Theorem [*Biometrika* 6 (1908)] und seine Bedeutung für eine Vertiefung der Fehlertheorie hingewiesen. Sind für eine Reihe von Beobachtungen die wahren Fehler  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und der Mittelwert der wahren Fehler  $x = \frac{1}{n} [x_i]$  und bezeichnet man die Abweichungen der Beobachtungen vom Mittelwert mit  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , so hat man  $\sum v_i^2 = \sum x_i^2 - nx^2$ . Das „Student“-sche Theorem bezieht sich auf das Verteilungsgesetz des Verhältnisses  $\alpha = \frac{x}{\sqrt{\sum v_i^2}}$  und besagt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß  $\alpha$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt, durch das Integral  $\int_a^b k(1+n\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} d\alpha$  gegeben wird, wo  $k$  aus der Beziehung zu bestimmen ist:  $k \int_{-\infty}^{+\infty} (1+n\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} d\alpha = 1$ . Verf.

gibt Tafeln für die Wahrscheinlichkeiten, daß der Fehler  $t$ -mal den mittleren Fehler überschreitet, wobei dieser nach der Formel  $\frac{1}{n(n-1)}$  bzw. nach der Formel  $\frac{1}{n(n-2)}$  berechnet wird. Kurz wird auf die Anwendungsmöglichkeiten der entwickelten Tafeln hingewiesen.  
F. Knoll (Wien).

**Marcantoni, Alessandro:** Il principio dei minimi quadrati. *Rend. Mat., Univ. Roma*, V. s. 3, 192—202 (1942).

Soit une variable aléatoire  $Z$  de f. de prob. totales a priori  $F(z)$ , à dérivée positive et finie. Si  $n$  observations conduisent aux  $n$  équations  $a_i z + h_i = 0$ , soit  $z_0$  la valeur calculée par la méthode des moindres carrés. Sous l'hypothèse que les erreurs  $v_i = a_i z + h_i$  sont indépendantes et obéissent toutes à une même loi de Gauss, l'A. démontre que quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $z_0$  tend vers la vraie valeur de  $z$ , en probabilités. Il étend ce résultat au cas de  $s$  variables déterminées par  $n$  équations.  
Ville (Paris).

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:**

**Boldrini, Marcello:** Sulla dispersione dei caratteri mendeliani. *Acta Pontif. Acad. Sci.* 5, 85—101 (1941).

Verf. betrachtet das statistische Beobachtungsmaterial, nach dem das Mendelsche Erbliehkeitsgesetz aufgestellt und kontrolliert wurde, wobei er untersucht, ob und inwieweit die aus diesem entspringende Dispersion der üblichen einfacheren Annahme des Bernoullischen Schemas entspricht. Wider Erwarten ist die Dispersion geringer als die normale, was Verf. nur auf psychologische Neigungen der Beobachter zurückführen zu können glaubt.  
Bruno de Finetti (Trieste).

**Malécot, Gustave:** Mendélisme et consanguinité. *C. R. Acad. Sci., Paris* 215, 313—314 (1942).

Nach dem Vorgange von S. Wright bezeichnet man als Verwandtschaftskoeffizienten  $f$  zweier Individuen  $H$  und  $\bar{H}$  die Größe, mittels derer sich die Abkömmlinge der Kreuzung  $H \times \bar{H}$  in einer durchgemischten Bevölkerung auf die Phänotypen eines einortigen Erbmerkmals mit den Genwahrscheinlichkeiten  $p, q$  nach den Wahrscheinlichkeiten  $p(p+f/q), 2pq(1-f), q(q+f/p)$  verteilen; z. B. ist bei Vettern  $f = \frac{1}{16}$  (vgl. Geppert-Koller, *Erbmathematik* 1938, 144; dies. Zbl. 18, 322). Das bekannte Häufungsgesetz (vgl. a. a. O. S. 134, 139f.) gestattet dann,  $f$  aus den entsprechenden Koeffizienten der Vorfahren zusammenzusetzen, wofür Verf. eine explizite Regel angibt (vgl. auch J. B. S. Haldane-Pearl Moshinsky, dies. Zbl. 22, 252).

Harald Geppert (Berlin)

**Hadwiger, Hugo, und Walter Wegmüller: Entwicklung und Umsechtung von Personengesamtheiten.** (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 369—379 (1941).

In einer sich ständig durch Ausscheiden und Neuzugang verändernden Personengesamtheit sei  $\mu(\xi)$  die Intensität des Ausscheidens eines Elementes vom Alter  $\xi$ , also  $\mu(\xi) > 0$  für  $\xi > 0$ ,  $= 0$  für  $\xi \leq 0$ ,  $p(t)$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine im Alter 0 eintretende Person der Gesamtheit mindestens die Zeit  $t$  über angehört, also  $p(t) = \exp\left\{-\int_{-\infty}^t \mu(\tau) d\tau\right\}$ ; die Neuzugänge sollen im Alter 0 erfolgen und dem gleichen Abbaugesetz unterliegen. Dann beschreibt man die Gesamtheit durch die Strukturfunktion  $S(\xi, t)$ , so daß zur Zeit  $t$  der Umfang der Elemente zwischen den Altersgrenzen  $\xi_1, \xi_2$  durch  $\int_{\xi_1}^{\xi_2} S(\xi, t) d\xi$  gegeben ist;  $S(\xi, 0) = s(\xi)$  ist die gegebene Struktur der Anfangsgeneration,  $S(0, t) = \Phi(t)$  die Erneuerungsfunktion. Dann genügt  $S(\xi, t)$  der Lagrangeschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial t} + \mu(\xi) S = 0$$

mit der Lösung:

$$(1) \quad S(\xi, t) = s(\xi - t) \exp\left\{-\int_{\xi-t}^{\xi} \mu(\tau) d\tau\right\} = s(\xi - t) p(\xi)/p(\xi - t);$$

also wird speziell  $\Phi(t) = s(-t)$ , und, gilt das asymptotische Gesetz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = c$ , so folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(\xi, t) = c p(\xi)$ . Für den Umfang des Bestandes zur Zeit  $t$  findet sich aus (1):

$$(2) \quad H(t) = \int_0^{\infty} S(\xi, t) d\xi = \int_0^t \Phi(\tau) p(t - \tau) d\tau + \int_0^{\infty} s(\tau) \frac{p(t + \tau)}{p(\tau)} d\tau;$$

bei gegebenem  $s(\xi)$ ,  $p(t)$ ,  $H(t)$  ist dies eine Volterrasche Integralgleichung 1. Art für  $\Phi(t)$ , die man durch Laplacetransformation lösen kann. In dem von Ch. Moser [Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 21, 1—24 (1926)] betrachteten Sonderfall einer nulljährigen Anfangsgesamtheit geht (2) in die bekannte Erneuerungsgleichung

$$H(t) = H(0) p(t) + \int_0^t H(\tau) \varphi(\tau) p(t - \tau) d\tau$$

[ $\varphi(t)$  = Erneuerungsintensität] über.

Harald Geppert (Berlin).

**Vajda, Stefan: Die erweiterte Sterbetafel und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Verwendung.** (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 241—248 (1941).

Zum Zweck der Ableitung der versicherungstechnischen Formeln auf der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlage wird der Begriff der „erweiterten Sterbetafel“ eingeführt; diese gibt nicht nur für jedes Alter die mittlere Anzahl der Lebenden, sondern auch die Wahrscheinlichkeit aller Abweichungen von der mathematisch erwarteten Zahl  $l_x$ . Es zeigt sich, daß unter gewissen Voraussetzungen über den Mittelwert dieser Wahrscheinlichkeiten dieselben Prämienformeln wie aus der gewöhnlichen Sterbetafel erhalten werden. Die Übereinstimmung der Formeln der Risikotheorie wird durch weitere Voraussetzungen über die erweiterte Sterbetafel erzielt. In der Abhandlung werden diese Voraussetzungen und Folgerungen systematisch untersucht.

Janko (Prag).

**Redington, Frank M., and Ronald L. Michaelson: An aspect of the „a priori“ probability theory of mortality.** (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 225—235 (1941).

Verff. prüfen die Größenordnung der Abweichungen der beobachteten Sterbequotienten gegenüber den auf Grund apriorischer Wahrscheinlichkeiten errechneten Werten und suchen daraus nähere Aufschlüsse über die Störungsursachen zu gewinnen.



Zu dem Zweck untersuchen sie für die Werte einer Selekttafel und einer Schlußtafel den Quotienten  $r_x = \Delta^3 q_x / (\Delta^3 q_x)$  aus der dritten Differenz der beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeit  $q_x$  und ihrer, auf Grund der Bernoulli-Verteilung unter der Annahme der Unabhängigkeit der  $q_x$  für verschiedene Lebensalter  $x$  gebildeten mittleren Abweichung für die verschiedenen Lebensalter. Für Mittelwert und Streuung der  $r_x$ -Verteilung ergibt sich bei der Selekttafel  $r = -0,0054$ ,  $\sigma_r = 1,003$ , bei der Schlußtafel  $\bar{r} = -0,0093$ ,  $\sigma_r = 1,506$ , während theoretisch  $\bar{r} = 0$ ,  $\sigma_r = 1$  zu erwarten wäre. Störungsursachen sind einerseits die Heterogenität innerhalb der einzelnen Altersklassen, andererseits die Unregelmäßigkeiten des gemittelten Wertes  $q_x$  von Alter zu Alter.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

**Noffi, Padrot:** Die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Erfassung. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 395—405 (1941).

Es wird gezeigt, daß die Sterblichkeitsänderungen der Versicherungsnehmer bei den Schweizer Gesellschaften sich nicht als zufällige Schwankungen bei konstanter Sterbenswahrscheinlichkeit erklären lassen. Verf. überlagert systematische Änderungen der Sterblichkeit (Epidemien, Kriegszeiten) und zufällige Fluktuationen. Für beide Erscheinungen nimmt er — stark schematisierend — eine normale Verteilung an. Da die Integration der Gesamtwahrscheinlichkeit für eine Sterblichkeit jenseits einer bestimmten oberen Grenze Schwierigkeiten bereitet, wird der Integrand in eine Brunsche Reihe entwickelt. Daraus gewinnt Verf. eine recht einfache Näherungsformel, welcher er eine große praktische Bedeutung für die Risikotheorie beimißt.

v. Schelling (Berlin).

**Rich, C. D.:** Mortality and variation in health. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 493—505 (1941).

Der Gesundheitszustand irgendeiner Person wird nach einer Skala, die von 0 bis 1 steigt, angegeben. Dieser Voraussetzung gemäß wird eine Person, deren Gesundheitszustand einwandfrei ist, mit 0 eingeschätzt, wogegen eine Person, „die am Rande des Todes steht“, die Einschätzungsrate 1 erhält. Bei einer Gruppe von Personen, die alle das gleiche Alter aufweisen, kann die Verteilung der Einschätzungsraten innerhalb dieser Gruppe durch eine Häufigkeitskurve dargestellt werden. Im Laufe der Zeit werden die Einschätzungsraten von einzelnen Personen steigen und von anderen sinken, so daß der Verlauf der Häufigkeitskurve einem kontinuierlichen Wechsel unterliegt. Es besteht eine große Auswahl von Methoden für die Bildung der Gesundheitskala. Eine „natürliche Skala“ wird eingeführt, von der man zu einer allgemeinen Formel für die Sterbeintensität gelangt. Zum Schluß wird noch das Problem der Unstetigkeitsstellen in der Häufigkeitskurve und als besonderer Fall die Sterbeintensität einer Selektionsgruppe behandelt.

Janko (Prag).

**Cantelli, F. P.:** I fondamenti matematici della tecnica delle assicurazioni. Giorn. Ist. Ital. Attuari 13, 1—27 (1942).

Im vorliegenden Aufsatz wird eine allgemeine mathematische Theorie der Versicherungstechnik entwickelt. Anknüpfend an die Lehren der klassischen Risikotheorie werden die versicherungstechnischen Probleme unter Verwendung der Theorie der Zufallsvariablen einer präzisen Lösung entgegengeführt.

F. Burkhardt.

**Hammon, Philip H., and R. D. Clarke:** Some effects upon insurance problems of modern criticisms of the frequency theory of probability. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 207—219 (1941).

Kritische Betrachtungen über die Berechtigung der häufigkeitstheoretischen Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf die Versicherungsrechnung, die Verff. lediglich mit Zweckmäßigkeit begründen. Größter Wert wird gelegt auf die Prüfung der Stabilität als notwendiger Voraussetzung für die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten, die sich auf Häufigkeiten stützen. Praktische Vorschläge

für die Behandlung erhöhter Risiken unter gleichzeitiger Benutzung apriorischer und häufigkeitstheoretischer Wahrscheinlichkeitsvorstellungen. *M. P. Geppert.*

**Berger, Alfred:** Welche Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde und wie kann die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Risikotheorie im Versicherungswesen begründet werden? (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 4, 9—22 (1941).

Verf. zeigt, daß und wie sich die gesamte Versicherungsmathematik auf dem Äquivalenzprinzip als einziger Arbeitshypothese aufbauen läßt, und untersucht die auf dem Äquivalenzprinzip beruhenden verschiedenen Begriffe der Prämienreserve, die sich ergeben je nachdem, ob man nach dem Schema der Gewinn- und Verlustrechnung verfährt oder auf dem Standpunkt der Risikotheorie steht. Hiermit ist „die Möglichkeit einer theoretischen Begründung der Anwendung der Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie in der Lebensversicherung“ nachgewiesen. Schließlich führt Verf. relative Maße der mittleren Prämienreserve und des mittleren Risikos ein, die sich zur Kennzeichnung des Verlaufes der Versicherung eignen. *M. P. Geppert.*

**Jacob, M.:** Su di un metodo d'approssimazione per il calcolo del rischio quadratico medio. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 1, 285—302 (1941).

Ausgehend von den Steffensenschen Ungleichungen gewinnt Verf. durch rechnerische Umformung der Hattendorfschen Formel Grenzen für das exakte mittlere Risiko. Die Ergebnisse werden angewandt auf die gemischte Versicherung mit konstanter Jahresprämie und auf diejenige mit variabler Prämie; die Möglichkeit, das mittlere Risiko der letzteren aus demjenigen der ersteren zu bestimmen, bedeutet eine erhebliche Vereinfachung gegenüber der höchst umständlichen, direkten Berechnung desselben. Schließlich werden für erhöhte Risiken mit steigender Übersterblichkeit Grenzen des mittleren Risikos bestimmt ohne Benutzung modifizierter Sterbetafeln.

*M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

**Simonsen, W.:** Über die kontinuierliche Nettoprämienreserve als Annäherung an die tatsächliche. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 156—159 (1943) [Dänisch].

Zwischen der kontinuierlichen Nettoprämienreserve und der tatsächlichen Prämienreserve bei unterjähriger Prämienzahlung besteht die Beziehung  ${}_i\bar{V} - {}_i\bar{V} \doteq \frac{1}{2m} \bar{P}_i \bar{v}_x \bar{\pi}$ , die bis auf Größen erster Ordnung richtig ist. In der Arbeit wird gezeigt, daß dieser Ausdruck bei steigender Sterblichkeit bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung, bei der kurzen Todesfallversicherung, bei der gemischten Versicherung, bei der Kapitalversicherung auf Erleben und bei der Versicherung mit festem Auszahlungstermin positiv bleibt. *F. Knoll (Wien).*

**Giaccardi, F.:** Sul calcolo della rendita vitalizia. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 12, 35—50 (1942).

Verf. sucht eine Näherungsformel für die Leibrenten der Form  $a_{\overline{x}|\overline{n}|} = F \cdot a_{\overline{n}|}$ , indem er den Reduktionskoeffizient  $F = F_{x,n}(i)$  durch Reihenentwicklung als Funktion des Zinsfußes  $i$  ausdrückt. *Bruno de Finetti (Triest).*

**Lordi, L.:** Sulle tavole di mortalità che portano alle stesse riserve matematiche. Giorn. Ist. Ital. Attuari 13, 57—65 (1942).

Verf. untersucht die Abhängigkeit der mathematischen Reserve von den Rechnungsgrundlagen. Im ersten Teil der Arbeit variiert er die Sterblichkeit durch Ansetzen verschiedener Sterbetafeln und im zweiten Teil den Zinsfuß. *F. Burkhardt.*

**Zwinggi, Ernst:** Untersuchungen über den Einbezug der vorzeitigen Vertragsauflösung in die Berechnung und Darstellung der Tarifprämie der Todes- und Erlebensfallversicherung. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 43, 55—74 (1943).

Verf. untersucht den Einfluß des Stornos auf den Preis der gemischten Versicherung. Im Ausdruck für die konstante Tarifprämie  $\pi_{\mu,\lambda}[1, U]$  wird  $U = v - (v - U)$  gesetzt ( $\mu, \lambda$  Sterbe- bzw. Stornointensität,  $U$  Abfindungswert,  $v$  vollständiges Deckungs-



kapital der Komb. [1, v]). Das führt wegen  $\pi_{\mu, \lambda}[1, v] = \pi_{\mu}[1]$  auf die Zerlegung  $\pi_{\mu, \lambda}[1, U] = \pi_{\mu}[1] - P_{\mu, \lambda}[0, v - U]$ , wo das Korrekturglied  $P_{\mu, \lambda}$  den auf einen Versicherten entfallenden Anteil an den Stornogewinnen darstellt. Der Vorteil der Zerlegung besteht darin, daß in dem Ausdruck für  $P_{\mu, \lambda}$  mit ausreichender Näherung die Abfallsordnung der vertragstreu Versicherten durch die gewöhnliche Absterbeordnung ersetzt werden kann. Eine entsprechende Vereinfachung ergibt sich auch bei diskontinuierlicher Betrachtungsweise. Wichtige Sonderfälle werden erörtert und die praktische Bedeutung der Näherungsformel unter zeitgemäßen Voraussetzungen geprüft. Es zeigt sich, daß die Einbeziehung des Stornos nur bei Systemen mit steigenden Gewinnanteilen einen merklichen Einfluß auf die Höhe der Tarifprämie erlangt.

*Fuhrich (Prag).*

**Meier, J.: Kombinierte Einzel- und Gruppenrechnung zur Bestimmung des Bilanzdeckungskapitals in der Lebensversicherung. (Ko-Methode.) Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 43, 75—88 (1943).**

Zur Bestimmung des Bilanzdeckungskapitals in der Lebensversicherung wird eine approximative Methode, sogenannte Ko-Methode, benützt, die davon ausgeht, daß man die vertragliche Versicherungsdauer in Etappen von 15 Jahre einteilt. Die vom Beginn einer Etappe an gemessene Zeit wird mit  $\tau$ , das Deckungskapital am Anfang einer Etappe mit  $V_0$  bezeichnet. Die Methode geht davon aus, daß der Zuwachs des Deckungskapitals innerhalb einer Etappe  $\Delta_\tau$  mit praktisch ausreichender Genauigkeit durch  $\Delta_\tau = s_{\tau-1}P_1 + \tau P_2$  dargestellt werden kann. Eine Versicherung kann die zu betrachtende Etappe bis zum letzten Jahr ganz umspannen, oder sie kann vorher schon vertraglich ablaufen. In letzterem Falle wird die Zeit vom Beginn der Etappe bis zum Ablauftermin mit  $\tau_n$  bezeichnet, und es sind drei Fälle zu unterscheiden, für welche die Formeln zur Berechnung der Prämien  $P_1$  und  $P_2$  zusammengestellt werden: a) kein Ablauf in der betrachteten Etappe oder Ablauf mit  $\tau_n \geq 10$ , b) Ablauf in der betrachteten Etappe und  $6 \leq \tau_n \leq 9$ , c)  $\tau_n \leq 5$ . Bei geeigneter Wahl des Zinsfußes in  $s_{\tau-1}$  können negative Prämien ausgeschlossen werden. Darauf wird eine Formel zur prospektiven Deckungskapitalberechnung für das ganze Lebensportefeuille gewonnen. Die Hauptarbeit bei Verwendung der Ko-Methode besteht in der Nachführung der Prämien- und Hilfswerte auf den technischen Karten oder in einem Register und in der Bildung des Standes am 31. Dezember unter Berücksichtigung der Eintritte, der Abgänge und Veränderungen seit dem 1. Januar. Die approximativ nach dieser Methode berechneten Deckungskapitalwerte werden mit dem genauen Deckungskapital verglichen und die Abweichungen beurteilt. Auch die Anpassungsfähigkeit dieser Methode wird geprüft.

*Janko (Prag).*

**Haferl, Eduard: Die Bestimmung der Selbstbehalte in der Lebensversicherung. (Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 I, 349—369 (1941).**

Dieser Abhandlung wird die Annahme zugrunde gelegt, die Aufgabe der Rückversicherung bestehe im Schutz des Erstversicherers gegen Verluste auf den Spitzenrisiken. Es wird gezeigt, daß eine obere und eine untere Grenze existiert, innerhalb derer die Selbstbehalte festzusetzen sind, damit die erwähnte Aufgabe erfüllt werden kann. Die obere Grenze der Selbstbehalte ist von der Größe und Struktur des gesamten Versicherungsbestandes abhängig und kann somit von Gesellschaft zu Gesellschaft variieren. Der Selbstbehalt kann aber auch ohne Kenntnis der oberen Grenze näherungsweise mit verhältnismäßig weitreichender Gültigkeit in Anlehnung an die untere Grenze ermittelt werden. Die hier gegebene Definition der unteren Grenze ist von den besonderen Merkmalen eines Versicherungsbestandes größtenteils unabhängig, insbesondere von seiner Größe und Struktur hinsichtlich der Höhe der Versicherungssummen. Nach den Ausführungen über absolute Höhe der Selbstbehalte wird die relative Höhe untersucht. Es wird die Frage, wie die Selbstbehalte für die verschiedenen Tarifförmern, Eintrittsalter und Versicherungsdauern sich zueinander verhalten

sollen, geklärt. Die relative Höhe der Selbstbehalte wird mit Hilfe des mittleren Risikos ausgedrückt. Die Selbstbehalte für die einzelnen Tarifförmlichkeiten sind so anzusetzen, daß sie sich zueinander verhalten wie die Quotienten aus dem erwartungsmäßigen Gewinn des Rückversicherers und dem Quadrat des mittleren Risikos. Der Ausdruck  $M = \sqrt{\sum q_i p_i C_i^2}$ , der nach der Theorie des mittleren Risikos bekanntlich den Betrag des mittleren einjährigen Risikos angibt, wird ohne Zuhilfenahme des Gedankens, das geometrische Mittel als Schwankungsmaß zu benutzen, abgeleitet.

Janko (Prag).

**Giaccardi, F.:** Di un criterio per la ripartizione degli utili agli assicurati. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 12, 12—23 (1942).

Verf. betrachtet eine Form von Gewinnbeteiligung mit steigenden Dividenden (arithmetische Folge) und untersucht, unter welchen Bedingungen die verschiedenen Gewinnquellen die Ausschüttung dieser Dividenden ermöglichen. Bruno de Finetti.

**Hagelen, H. G., W. Meyer, C. van Ebbenhorst Tengbergen, Th. Nieuwenhuis jr. und Tj. S. Visser:** Erbrente und Einkommensteuer. Verzekerings-Arch. 24, 188—206 (1943) [Holländisch].

Die vier erstgenannten Verff. kritisieren bzw. ergänzen die Ausführungen der in dies. Zbl. 27, 416 besprochenen Arbeit des fünften Verf. Die beiden ersten Verff. erkennen die Einfachheit des Verfahrens von Visser an, bemängeln aber die Willkür darin und daß es — ohne gesetzliche Stütze — nur eine Näherung biete. Der dritte Verf. gibt eine bessere Näherung, die aber finanzrechtlich auf Schwierigkeiten stößt. Der vierte Verf. legt eine praktisch anwendbare genaue Lösung vor.

H. Härten.

**Müller, M.:** Note sur le produit de plusieurs probabilités d'extinction appliquées à des groupes de valides ou d'invalides. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 43, 89—97 (1943).

On admet qu'un invalide peut redevenir valide au cours de l'année considérée, puis de nouveau invalide, ou mourir, au cours de la même année. Les invalides du terme  $\gamma_1 l_x^a i_x$  et les valides du terme  $\gamma_1 l_x^i w_x$  (où  $\gamma_1 = 1$ ) donneront naissance, dans le cours de l'année, à des valides au nombre de  $\gamma_2 l_x^a i_x w_x$  et à des invalides au nombre de  $\gamma_2 l_x^i w_x i_x$ , et, ensuite, d'une manière plus générale, à des cas d'invalidité, de validité, ou de décès au nombre de  $\gamma_3 l_x^a p_1 p_2 p_3$  où  $p_n$  représente l'une des probabilités  $i_x, w_x, q_x^a$  et  $q_x^i$  et l'indice  $j$  représente  $a$  ou  $i$ . L'a. démontre le théorème suivant: Le coefficient  $\gamma_m a$ , en valeur absolue, la forme  $\frac{1}{m!}$  propre aux développements en série de Taylor.

Janko (Prag).

**Engelfriet, J.:** Quelques formules actuarielles relatives à l'invalidité totale ou partielle par suite d'accident. Verzekerings-Arch. 24, 145—161 (1943) [Holländisch].

L'a. s'intéresse au problème du calcul de la valeur actuelle d'une rente d'invalidité, qui varie avec le degré d'invalidité du bénéficiaire dans l'assurance obligatoire contre les accidents du travail. — Dans l'assurance invalidité où l'on ne distingue que les „états“ d'invalidité dont le pourcentage se monte à 1 et à 0, il n'y a que deux espèces de mutations, celle de l'état de degré 0 à l'état de degré 1 et inversement. Le calcul d'une valeur actuelle dans cette forme d'assurance doit être basé sur des probabilités relatives à ces deux espèces de mutations, c'est à dire sur les taux d'entrée en invalidité et de sortie de l'invalidité. Dans le cas examiné ici, il y a beaucoup plus d'espèces de mutations. Si l'on se contente de fixer le pourcentage d'invalidité à l'une des valeurs 0, 5, 10, . . ., on distingue, pour un bénéficiaire de rente, 21 „états“ d'invalidité. Vu qu'on a l'intention d'établir les formules pour le cas de  $n$  „états d'invalidité“ on introduit, déjà pour le cas simple de deux „états d'invalidité“, une notation nouvelle. On ne parle pas de  $l_m^a$  valides et de  $l_m^i$  invalides, mais de  $l_m^1$  assurés de l'état I et de  $l_m^2$  assurés de l'état II. On ne parle pas non plus de taux d'entrée en invalidité  $i_m$ , mais de taux  $o_m^{12}$  de mutation  $I \rightarrow II$ . On réduit le problème donné



à déterminer les valeurs de  $l_{m+1}^1$  et de  $l_{m+1}^2$ , c'est à dire les nombres de survivants d'un groupe de  $l_m^1 + l_m^2$  assurés. On donne une solution déjà connue pour ce cas spécial de 2 „états d'invalidité“ puis on trouve une solution pour un cas suffisamment généralisé et on obtient l'expression fondamentale qui permet de calculer, à chaque moment, les nombres de personnes dans les divers états d'invalidité, survivants d'un groupe initial de personnes du même groupe d'âge avec une distribution arbitraire dans les états d'invalidité. — Des formules basées sur des intensités de décès et de mutation d'état d'invalidité au lieu de probabilités mensuelles sont développées au dernier paragraphe, mais ne sont pas de grande valeur pour des buts pratiques.

*Janko (Prag).*

**Riebesell, Paul:** Die mathematischen Grundlagen der Sachversicherung. (Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 4, 27—34 (1941).

Verf. zeigt die Gültigkeit der Khintchineschen Erweiterung des Poissonschen Gesetzes der seltenen Ereignisse

$$W(X, t) = e^{-\lambda t} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} \Phi_x(X); \quad \Phi_x(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{x-1}(X - \xi) d\Phi(\xi)$$

in der Sachversicherung, wenn  $\lambda$  die mittlere Anzahl der Schäden in der Zeiteinheit und  $\Phi(x)$  die Summenverteilung der Schadenhöhe bedeutet. Die für viele Zweige der Sachversicherung zutreffende Annahme, daß sich die Verteilungsdichte von  $\Phi$  durch ein Exponentialgesetz darstellen läßt, führt auf einen Ausdruck für  $W(X)$ , der sich mit Hilfe der Besselschen Funktionen 1. Art und 1. Ordnung leicht auswerten läßt. Bei beliebigem  $\Phi$  kann  $W(X)$  durch eine Rekursionsformel berechnet oder durch die Brunnssche Reihe dargestellt werden. Damit sind die Grundlagen für die praktisch wichtigen Formeln, wie z. B. Nettoprämie und Schwankungsrücklage, gewonnen.

*Fuhrich (Prag).*

**Polidori, Ciro:** La matematica finanziaria nell'istituto commerciale quinquennale. Period. Mat., IV. s. 22, 158—164 (1942).

L'a., parmi des considérations générales sur l'enseignement des mathématiques financières, donne quelques indications sur la manière de représenter la capitalisation à intérêts simples par des formules de même structure que celles relatives aux intérêts composés.

*Ville (Paris).*

**Conte, Luigi:** Sul valore capitale di una rendita certa a tasso sinusoidale. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 12 24—34 (1942).

Si le taux de capitalisation est une fonction sinusoidale du temps, soit  $\varrho(t) = \alpha + \beta \sin \gamma t$  ( $\alpha > \beta$ ), une somme  $S_0$  placée à intérêts composés devient, au bout du temps  $t$ ,  $S(t) = S_0 \exp\left\{\alpha t + \frac{\beta}{\gamma} (1 - \cos \gamma t)\right\}$ . La valeur actuelle d'une rente certaine, continue, non différée, payable jusqu'à l'instant  $s$ , est ainsi

$$(1) \quad \bar{a}(s) = \int_0^s \exp\left\{-\alpha t - \frac{\beta}{\gamma} (1 - \cos \gamma t)\right\} dt.$$

L'A. propose plusieurs développements en série de (1), propres aux calculs numériques. Il traite également le cas  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \pi/ms$  ( $m$  entier positif).

*Ville (Paris).*

**Insolera, F.:** In tema di capitali variamente accumulati. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 12, 51—55 (1942).

Unter Bezugnahme auf eine weitergehende Veröffentlichung betont Verf., daß das Problem der Kapitalansammlung im gewöhnlichen Sinne, d. h. die Bestimmung des angesammelten Kapitals bei vorgegebenen demographischen und finanziellen Voraussetzungen und bekannten Ansamlungsbedingungen eine eindeutige Lösung besitzt, während das inverse Problem unendlich viele Lösungen aufweist, d. h. es eine un-

endliche Mannigfaltigkeit von Voraussetzungen gibt, die zu dem gleichen Ansammlungsbetrag führen.

*Bruno de Finetti* (Triest).

**Guidotti, Salvatore:** Su una interpretazione dell'indice di concentrazione  $\delta$ . (5. riun. sci., Roma, 30.—31. V. e 1. VI. 1942.) Soc. ital. Statist., Atti 223—225 (1942).

Nach Gini's Deutung besagt das Paretosche Einkommenverteilungsgesetz folgendes:  $q(x)$  sei der Bruchteil des Gesamteinkommens, der aus Einkommen  $\leq x$  besteht,  $p(x)$  der Bruchteil der Einkommensempfänger, deren Einkommen  $\leq x$  ist; dann gilt:  $1 - p = (1 - q)^\delta$ . Verf. leitet daraus durch Differentiation nach  $p$  und Verwendung der Beziehung  $dq = x \cdot dp$  die Gleichung ab:

$$\delta = \frac{1 - q}{x(1 - p)}.$$

Darin bedeutet  $(1 - q) : (1 - p)$  das mittlere Einkommen der Einkommensempfänger, deren Einkommen  $x$  übersteigt, womit  $\delta$  eine unmittelbar angebbare Bedeutung erhält.

*Bruno de Finetti* (Triest).

**Wold, Herman:** A synthesis of pure demand analysis. Skand. Aktuarie Tidskr. 1943, 85—118.

Die klassische Wirtschaftstheorie fußt auf dem Begriff der Nützlichkeit. Die moderne Theorie nimmt an, daß die Nützlichkeit quantitativ nicht gemessen werden kann, und setzt an ihre Stelle das Individualprinzip, auf dem sie drei Typen der Annäherung an die klassische Theorie aufbaut, nämlich die Theorie der Nachfragefunktion, die Theorie der Indifferenzlinien und die Grenzs substitution, die dem Grenznutzen entspricht. Verf. vollzieht eine Synthese der drei Theorien. Der einigende Gesichtspunkt wird durch eine Analyse der wirtschaftlichen Bedeutung der Integrabilitätsbedingung gewonnen.

*F. Burkhardt* (Leipzig).

**Uggé, Albino:** Sul metodo di eliminazione nella costruzione dei numeri indici dei prezzi. Acta Pontif. Acad. Sci. 5, 67—71 (1941).

Gilt die Gleichheit zwischen den Paascheschen und Laspeyreschen Indexzahlen, so sind noch zwei andere von Gini betrachtete Bedingungen erfüllt.

*Bruno de Finetti* (Triest).

## Geometrie.

### Nichteuklidische Geometrie:

**Hruša, Karel:** Über sphärische Kegelschnitte. Rozhl. mat.-přirodovéd. 21, 78—87 u. 105—114 (1942) [Tschechisch].

Aus der elliptischen Geometrie einer Ebene läßt sich bekanntlich die sphärische Geometrie ableiten. Verf. untersucht auf einer Kugel elementare Eigenschaften der sphärischen Kurven (sph. Kegelschnitte), welche in der entsprechenden elliptischen Geometrie als „Kegelschnitte“ erscheinen.

*Hlavatý* (Prag).

**Silberstein, Ludwik:** The space relation among five points in elliptic and hyperbolic geometry. Philos. Mag., VII. s. 33, 536—540 (1942).

Verf. leitet die Formel ab, welcher die 10 Abstände von 5 Punkten  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  eines nichteuklidischen Raumes vom konstanten Krümmungsradius  $r$  genügen. Ist  $c_{ik} = \cos(P_i P_k / r)$  im elliptischen bzw.  $c_{ik} = \cosh(P_i P_k / r)$  im hyperbolischen Raum, so gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Grenzübergang folgt daraus die bekannte Fünfpunktrelation des euklidischen Raumes.

*G. Hajós* (Budapest).



## **Elementargeometrie:**

Corbellini, Giuseppe: Dimostrazione geometrica della formula di Erone. Period. Mat., IV. s. 22, 178—181 (1942).

Ursprünglicher, vom alexandrinischen Heron gegebener Beweis der Formel für den Dreiecksinhalt. G. Hajós (Budapest).

Vasiliu, Ion C.: Metrische Beziehungen in der Dreiecksgeometrie. Gaz. mat. 48, 495—502\* (1943) [Rumänisch].

Wiedemann, B.: Algebraisch-geometrische Untersuchungen über Konstruktionsmöglichkeiten auf der Kugel. Dtsch. Math. 7, 178—184 (1943).

Die Arbeit ist ausdrücklich als „Fortsetzung“ einer früheren des gleichen Titels (dies. Zbl. 17, 318) bezeichnet. In ihrem § 1 wird auf Grund elementarer Überlegungen zuerst die Konstruktion des Kugelradius  $r$  gezeigt, wenn ein Großkreis gezeichnet vorliegt. Der § 2 weist nach, daß man aus  $r$  die Größe  $r\sqrt{2}$  und umgekehrt mit elementaren Mitteln konstruieren kann. Das Verfahren wird im Sinne einer geometrischen Rekursion im § 3 dahin erweitert, daß man aus  $r/(\sqrt{2})^{n-1}$  und  $r/(\sqrt{2})^n$  auch  $r/(\sqrt{2})^{n+1}$  konstruieren kann. Die Beweisführung erfolgt durch vollständige Induktion. Der § 4 zeigt dann, daß es allgemein möglich ist, auf elementarem Wege aus  $r/(\sqrt{2})^{n+1}$  und  $r/(\sqrt{2})^n$  auch  $r/(\sqrt{2})^{n-1}$  zu konstruieren, also im wesentlichen die Umkehrung der Aufgabe des § 3 zu lösen. — In der früheren Arbeit hat Verf. gezeigt, daß man aus der Tetraederkante  $r \cdot \sqrt{2}$  konstruieren kann. Für das Oktaeder und das Ikosaeder sind die entsprechenden Aufgaben trivial. Er zeigt nun hier im § 5 die elementare Konstruktion von  $r \cdot \sqrt{2}$  aus der Würfelkante und läßt die restliche Aufgabe der Konstruktion dieser Größe aus der Kante des Dodekaeders noch offen. — Die Untersuchungen hängen engstens mit dem X. Buch der Euklidischen „Elemente“ zusammen, das bekanntlich ebenfalls die Grundlagen für das XIII. Buch und die Theorie der regulären Körper bildet. Steck (München).

Heiseler, A.: Der Näherungswert  $\pi = \frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6})$ . Z. angew. Math. Mech. 23, 62—63 (1943).

Verf. gibt eine einfache Konstruktion des von ihm gefundenen Näherungswertes für  $\pi$ :  $\frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = 3,1416174 \dots$  und erhält dadurch eine angenäherte Rektifikation des halben Kreisbogens mit einem Fehler, der kleiner als  $\frac{1}{4} \cdot 10^{-4}$  ist. Klingst.

## **Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:**

Casara, Giuseppina: Delle coniche come luoghi geometrici relativi ad alcuni problemi di contatto. Period. Mat., IV. s. 22, 173—177 (1942).

Vergleich der von Huygens (1646) und Lawson (1771) gegebenen Lösungen für das Problem, den geometrischen Ort der Mittelpunkte jener Kreise zu bestimmen, die zwei (evtl. entartete) Kreise berühren. G. Hajós (Budapest).

Voderberg, H.: Über ein- und umschriebene Parallelogramme der Ellipse. Dtsch. Math. 7, 172—177 (1943)

Umschreibt man einer Ellipse mit den Halbachsenlängen  $a, b$  sämtliche Parallelogramme mit den Richtungskoeffizienten  $m, m_1$ , so daß  $mm_1 = k$  ( $k$  fest) ist, dann liegen die Eckpunkte aller dieser Parallelogramme auf einem neuen Kegelschnitt, welcher durch die Ecken des der Ellipse umschriebenen achsenparallelen Rechtecks geht. Dieser wird für  $k < 0$  eine Ellipse (insbesondere für  $k = -1$  ein Kreis), für  $k > 0$  eine Hyperbel und artet für  $k = 0$  in ein Geradenpaar aus. — Für  $k = +\frac{b}{a}$  entsteht eine zur vorgegebenen Ellipse konfokale Ellipse. Für die äußere Ellipse sind die Parallelogramme einbeschriebene. Das führt auf den Satz, daß sich aus der Menge aller einer Ellipse einbeschriebenen Parallelogramme eine einparametrische Teilmenge so auswählen läßt, daß alle ihr angehörigen Parallelogramme eine zur gegebenen Ellipse konfokale

umhüllen. Dieselben Betrachtungen werden für  $k = \frac{b^2}{a^2}$  angestellt. In diesem Fall ist die äußere Ellipse zur inneren ähnlich. — Den Abschluß der Arbeit bilden einige Sätze über Inhalt und Umfang gewisser ein- und umschriebener Parallelogramme einer Ellipse.

Klingst (Wien).

**Gheorghiu, Şerban:** Einige Anwendungen der isotropen Koordinaten. *Gaz. mat.* 48, 150—157 (1942) *at.* 202—207 (1943) [Rumänisch].

Verf. beweist einige, z. T. bekannte, Sätze über Dreiecke, die einem Kegelschnitt einbeschrieben und einem zweiten Kegelschnitt umbeschrieben sind, mittels isotroper Koordinaten. (Sind  $x, y$ , die gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Ebene, so sind  $x + iy$  und  $x - iy$  die isotropen Koordinaten desselben Punktes.) Von seinen Sätzen seien folgende angeführt: Sind drei Dreiecke einem Kegelschnitt einbeschrieben, so haben die drei Kegelschnitte, die je zwei der drei Dreiecke einbeschrieben sind, eine Tangente gemein (und der duale Satz). Der Ort des Höhenpunktes eines Dreiecks, das einem festen Kreis einbeschrieben und einem festen Kegelschnitt umbeschrieben ist, ist ein Kreis (oder eine Gerade, wenn jener Kegelschnitt eine Parabel ist). Der Ort des Orthopols einer festen Geraden bezüglich der einem festen Kreis einbeschriebenen und einem festen Kegelschnitt umbeschriebenen Dreiecke ist ein Kreis (oder eine Gerade, wenn jener Kegelschnitt eine Parabel ist). Ist das feste Dreieck  $\Sigma$  einem festen Kegelschnitt  $O$  einbeschrieben und das veränderliche Dreieck  $T$  dem Kegelschnitt  $O$  einbeschrieben und einem zweiten festen Kegelschnitt  $\Gamma$  umbeschrieben, so haben die den Dreiecken  $\Sigma$  und  $T$  einbeschriebenen Kegelschnitte mit  $\Gamma$  eine Tangente gemein (und der duale Satz). Gegeben seien ein Kegelschnitt  $\Gamma$  und vier feste Geraden  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Delta$ , von denen die letzte  $\Gamma$  berührt. Ein veränderlicher Kegelschnitt, der die vier festen Geraden berührt, hat mit  $\Gamma$  außer  $\Delta$  noch drei andere Tangenten gemein. Das von diesen gebildete Dreieck ist einem festen Kegelschnitt einbeschrieben, der dem aus  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  gebildeten Dreieck umbeschrieben ist.

M. Zacharias (Berlin).

**Rossier, Paul:** Démonstration projective de l'équation des foyers conjugués. *C. R. Soc. Physique Genève* (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) 59, 207—208 (1942).

Alle Kegelschnitte, die mit ihrem Scheitel  $S$  eine vorgegebene Kurve in einem vorgegebenen Punkt berühren und außerdem mit dieser Kurve eine vorgegebene Tangente gemeinsam haben, besitzen Brennpunkte, die sich in einer Involution auf der Normalen in  $S$  entsprechen. Die analytische Darstellung dieser Involution wird Gleichung der konjugierten Brennpunkte genannt.

Klingst (Wien).

**Abramescu, N.:** Eigenschaften der Kegelschnittnormalen. *Gaz. mat.* 48, 539—542 (1943) [Rumänisch].

Auf einem Kegelschnitt werden die Punktepaare  $P_1, P_2$  betrachtet, deren Normalen sich auf dem Kegelschnitt schneiden. Die Hülle der Geraden  $P_1 P_2$  ist dann einmal — natürlich — die Evolute des Kegelschnitts, sodann aber im Falle eines Mittelpunktskegelschnitts ein zu diesem konzentrischer und ähnlich gelegener Kegelschnitt, im Falle einer Parabel ein Punkt, nämlich das Spiegelbild des Scheitels an der Leitlinie.

Harald Geppert (Berlin).

**Bone, H. B.:** Über orthogonale Kegelschnitte. *Mathematica, Zutphen B* 11, 132—150 (1943) [Holländisch].

Verf. nennt zwei Kegelschnitte orthogonal, wenn sie sich in jedem ihrer Schnittpunkte orthogonal schneiden. Er geht dabei von einer allgemeinen Metrik mit dem absoluten Kegelschnitt  $\Omega$  aus, welcher die Tangentengleichung  $\Omega_\xi \equiv \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 + \omega_3 \xi_3^2 = 0$  erhält. Die Resultate gelten daher sowohl in der euklidischen, wie in der nichteuklidischen Geometrie. Verf. stellt die Aufgabe, sämtliche Kegelschnitte  $L$  zu bestimmen, welche zu einem gegebenen, nichtzerfallenden Kegelschnitt  $K$  mit der Gleichung  $K_\alpha \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  orthogonal sind. Den Zahlen  $\omega_i$  werden dabei solche Bedingungen auferlegt, daß  $K$  in bezug auf  $\Omega$  allgemeine Lage hat (u. a. daß  $K$  weder ein Kreis noch eine Parabel ist). Von Bedeutung sind die vier Richtpunkte von  $K$ ,



d. h. die Punkte mit isotroper ( $\Omega$  berührender) Tangente. Verf. findet die folgenden Klassen  $L$ : 1. Die Schar der mit  $K$  konfokalen Kegelschnitte; 2. drei Kegelschnittbündel; einer von diesen wird bestimmt durch  $x_2 x_3 = 0$  und  $K'_\xi \equiv 2\Omega_\xi - (\omega_2 + \omega_3)K_\xi = 0$ ;  $K'$  gehört zur konfokalen Schar und wird von  $K$  harmonisch getrennt durch zwei singuläre Exemplare ( $x_2^2 = 0$  und  $x_3^2 = 0$ ) der Schar; 3. die Doppelgeraden; 4. die Normalenpaare von  $K$ , welche sich in einem Punkt von  $K$  schneiden; 5. vier Klassen von Kegelschnitten, welche  $K$  in einem Richtpunkt berühren; 6. sechs Klassen von solchen, welche in einem Richtpunktpaar  $K$  doppelt berühren; 7. vier Klassen von Kegelschnitten, welche  $K$  in einem Richtpunkt oskulieren; 8. vier Klassen hyperoskulierender Kegelschnitte.

O. Bottema (Delft).

Abramescu, Nicolas: Sur les courbes anallagmatiques. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 25, 113—115 (1942).

Eine anallagmatische Kurve ist bekanntlich eine solche, die bei Ausübung einer bestimmten Inversion in sich übergeht. Die Punkte dieser Kurve werden dabei einander paarweise zugeordnet. Verf. gibt mit Hilfe von Grenzübergängen und unter Benutzung des Desarguesschen Satzes einen etwas umständlichen Beweis des folgenden Satzes: Die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte zweier entsprechender Punkte einer anallagmatischen Kurve geht stets durch das Zentrum der Inversion. Am Schluß der Arbeit wird noch ein analytischer Beweis dieses Satzes angedeutet. Klingst (Wien).

Horninger, Heinz: Über Spiegelbilder bei ebenen Kurven. (Berührungspunktkurven von Kaustikenbüscheln.) Dtsch. Math. 7, 129—145 (1943).

Das Spiegelbild eines Punktes  $P$  in bezug auf eine ebene Kurve  $k$  ist der Berührungspunkt  $P^*$  der Kaustik von  $P$  mit einer durch das Auge gehenden Tangente. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Punktverwandschaft  $P-P^*$ . Ist  $s^*$  ein durch das Auge  $A$  gehender Strahl,  $s$  ein aus  $s^*$  durch Reflexion an  $k$  hervorgehender Strahl, so sind bekanntlich die Punktreihen  $s$  und  $s^*$  durch die Verwandschaft  $P-P^*$  einander perspektiv zugeordnet hinsichtlich eines Zentrums  $Z$ , das auf dem zu  $s$  und  $s^*$  gehörigen Einfallslot liegt. Es zeigt sich, daß man die Verwandschaft  $P-P^*$  mittels der Zentralkurve, dem Ort der Zentren  $Z$  und der Hauptkaustik, der Kaustik des Auges  $A$ , beherrscht. — Besonders eingehend werden die Bildkurven und Dingkurven der Geraden untersucht, wenn die spiegelnde Kurve algebraisch ist, wobei die Plückerschen Charaktere der auftretenden Kurven ermittelt werden. Sind  $n, m, p$  Ordnung, Klasse, Geschlecht einer  $r$ -fach zirkularen Kurve  $k$ ,  $\nu$  und  $\mu$  Ordnung und Klasse der Kaustiken, so ist die Bildkurve einer Geraden i. a. eine  $r$ -fach singuläre Kurve  $(n + \nu)$ -ter Ordnung,  $(m + 2\nu)$ -ter Klasse vom Geschlecht  $p$ ; die Dingkurve einer Geraden ist  $2r$ -fach zirkular und von der  $(n + \nu)$ -ten Ordnung. Die Sonderfälle „ $c$  als Kegelschnitt oder Kreis“ führen auf z. T. bekannte Beziehungen.

E. Kruppa (Wien).

Sergescu, P.: Sur une proposition de Cayley. Bull. sci. Ecole polytechn. Timişoara 11, 22—29 (1943).

On considère dans l'espace à  $n$  dimensions  $n + 1$  points  $P_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) dont chacun est défini comme l'intersection de  $n$  hyperplans:

$$A_{j,n+i}^1 x_1 + A_{j,n+i}^2 x_2 + \dots + A_{j,n+i}^{n+1} x_{n+1} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les  $P_j$  soient cohyperplanaires s'écrit  $\Delta = 0$ , où  $\Delta$  est un déterminant d'ordre  $n(n + 1)$  dont les éléments non nuls égalent les coefficients  $A_{ji}^m$  et qui pour  $n = 2$  a été considéré par Cayley. L'auteur démontre qu'on a  $\Delta = \pm D$ , où  $D$  est un déterminant d'ordre  $n + 1$ , dont les éléments sont des déterminants d'ordre  $n$ .

O. Bottema (Delft).

Godeaux, Lucien: Sur une homographie hyperspatiale de période quatre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 214—218 (1941).

$p$  sei eine ungerade Primzahl,  $\varepsilon$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel. Im  $S_{p-1}$  mit den projektiven Koordinaten  $x_0, \dots, x_{p-1}$  betrachtet Verf. die Projektivität  $H: \varrho x'_i = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{ik} x_k$ ,

$i=0, \dots, p-1$ .  $H$  hat die Periode 4, mithin 4 Punktachsen;  $H^2$  ist eine biaxiale harmonische Homographie, deren Punktachsen für  $p=2\nu+1$  sind a) der  $S_\nu$  mit den Gleichungen  $x_i = x_{p-i}$ ,  $i=1, 2, \dots, \nu$ , b) der  $S_{\nu-1}$  mit den Gleichungen  $x_0 = 0$ ,  $x_i = -x_{p-i}$ ,  $i=1, 2, \dots, \nu$ . Von den Punktachsen von  $H$  fallen je zwei nach  $S_\nu$  und  $S_{\nu-1}$ , und zwar sind diese 1. für gerades  $\nu = 2\eta$ : in  $S_\nu$  ein  $S_\eta$  und ein  $S_{\eta-1}$ , in  $S_{\nu-1}$  zwei  $S_{\eta-1}$ , 2. für ungerades  $\nu = 2\eta + 1$ : in  $S_\nu$  zwei  $S_\eta$ , in  $S_{\nu-1}$  ein  $S_\eta$  und ein  $S_{\eta-1}$ .

Harald Geppert (Berlin).

### Algebraische Geometrie:

Gandin, Renato: *Intorno a due problemi di geometria numerativa ed alla loro interpretazione funzionale*. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 100, Pt 2, 471—478 (1941).

Für eine algebraische Kurve  $C_p^n$  der Ordnung  $n$  und des Geschlechts  $p$  in einem Raume  $S_r$  werden hier folgende zwei Anzahlen bestimmt: 1) die Anzahl der Räume  $S_{r-2}$ , die mit  $C_p^n$  eine  $\nu$ -punktige und eine  $(r-\nu)$ -punktige Berührung aufweisen; 2) die Anzahl der Räume  $S_{r-2}$ , die  $C_p^n$  in einem Punkte berühren und in  $2r-5$  Punkten schneiden. Die zwei Beweise sind Anwendungen des Cayley-Brillschen Korrespondenzprinzips.

E. G. Togliatti (Genova).

Maréchal, R.: *Sur une transformation birationnelle (3, 4) de l'espace*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 260—264 (1941).

In einer vorangehenden Arbeit (vgl. dies. Zbl. 27, 128; Fall A 2a) ist Verf. auf ein homaloidisches dreidimensionales System von  $F^3$  des  $S_3$  gestoßen, die einen Doppelpunkt  $P_1$ , einen einfachen Punkt  $P_2$ , eine Ebene  $C^3$  in einer durch  $P_1$  gehenden Ebene  $\omega_3$  und eine die  $C^3$  in 2 Punkten treffende  $C^2$  gemein haben. Die variable Schnittkurve dieser  $F^3$  ist eine  $C^4$  mit dem Doppelpunkt  $P_1$  und dem einfachen Punkt  $P_2$ , die  $C^2$  in 4,  $C^3$  in 2 Punkten trifft. Bezieht man diese  $F^3$  projektiv auf die Ebenen eines  $\bar{S}_3$ , so entsteht eine Cremona-Abbildung  $T$  zwischen  $S_3$  und  $\bar{S}_3$ , bei der den Ebenen von  $S_3$  ein homaloidisches System von  $\bar{F}^4$  entspricht, die alle den Doppelpunkt  $\bar{P}$ , eine doppelt gezählte  $\bar{C}^2$ , eine  $\bar{C}^4$  und eine Gerade  $\bar{p}$  gemein haben und deren veränderliche Schnittkurve eine durch  $\bar{P}$  gehende  $\bar{C}^3$  ist, die  $\bar{p}$  in einem,  $\bar{C}^2$  in drei,  $\bar{C}^4$  in 2 Punkten trifft. Verf. untersucht diese Abbildung genauer, indem er ihre Fundamentalgebilde aufstellt: Die Jacobische Fläche des Systems der  $F^3$  besteht aus der zweimal gezählten Ebene  $\omega_3$ , der Ebene  $\omega_2$  von  $C^2$ , dem Projektionskegel von  $C^2$  mit der Spitze  $P_1$  und der Fläche des Systems der  $F^3$ , die in  $P_2$  einen Doppelpunkt aufweist; die Jacobische Fläche der  $F^4$  ist eine doppelt gezählte  $\bar{F}^2$ , die  $\bar{P}$ ,  $\bar{C}^2$  und  $\bar{C}^4$  enthält, die doppelt gezählte Ebene der  $\bar{C}^2$ , der Projektionskegel der  $\bar{C}^2$  mit der Spitze  $\bar{P}$  und eine doppelt durch  $\bar{p}$  und  $\bar{C}^2$  und einfach durch  $\bar{C}^4$  laufende Fläche 4. Ordnung.

Harald Geppert (Berlin).

Châtelet, François: *Sur la notion d'équivalence due à Poincaré*. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 142—144 (1943).

Zwei algebraische Mannigfaltigkeiten  $(F)$  und  $(F')$  heißen äquivalent im Sinne von Poincaré, wenn es eine birationale Korrespondenz zwischen  $(F)$  und  $(F')$  mit Koeffizienten aus dem Grundkörper  $P$  gibt, bei der niemals einem einzigen Punkt der einen Mannigfaltigkeit unendlich viele Punkte der anderen entsprechen. Die kritischen Punkte einer solchen Korrespondenz, d. h. die Punkte von  $(F)$ , von denen ein Bildpunkt auf  $(F')$  mehrere Urbilder auf  $(F)$  hat, sind notwendig Doppelpunkte von  $(F)$  und dasselbe gilt für die kritischen Punkte auf  $(F')$ . Poincaré hat bewiesen, daß eine rationale Kurve mit rationalen Koeffizienten in einem geeigneten quadratischen Zahlkörper äquivalent einer Geraden ist. Der Verf. bringt die Verallgemeinerung: Eine  $s$ -dimensionale rationale Mannigfaltigkeit mit Koeffizienten aus  $P$  ist in einem geeigneten Erweiterungskörper von  $P$ , dessen Körpergrad ein Teiler von  $s+1$  ist, äquivalent einem linearen Raum. Oder: Sie ist im gegebenen Körper  $P$  äquivalent



einer Mannigfaltigkeit, deren Grad ein Teiler von  $s + 1$  ist (im Fall  $s = 1$  also, nach Noether, einer Geraden oder einem Kegelschnitt). *van der Waerden* (Leipzig).

**Severi, Francesco:** Sugli integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie e sulle involuzioni irregolari appartenenti ad una varietà o superficie algebrica. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 21, 1—20 (1942).

Eine in ihrem Inhalt unrichtige Arbeit von F. Enriques (dies. Zbl. 25, 215) gibt Verf. Veranlassung, die transzendente Theorie der Involutionen auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit von Grund aus zu entwickeln.  $V_k$  sei irreduzibel und von der Flächenirregularität (F. I.)  $q$ , d. h. besitze  $q$  unabhängige einfache Integrale 1. Gattung  $u_1, \dots, u_q$  mit den  $2q$  Perioden  $\omega_{ij}$ ,  $i = 1 \dots q$ ,  $j = 1, \dots, 2q$ ; es bezeichne dann  $\omega_j$  den Vektor mit den Komponenten  $\omega_{1j}, \dots, \omega_{qj}$ . Ein Vektor  $\theta$  mit den Komponenten  $\theta_1, \dots, \theta_{q'}$ ,  $q' \leq q$  heißt Unterperiode von  $q'$  der Integrale  $u_i$ , nämlich  $u_1, \dots, u_{q'}$ , wenn es eine ganze Zahl  $\nu$  gibt, so daß  $\nu\theta$  eine Simultanperiode von  $u_1, \dots, u_{q'}$  ist, d. h. ganze Zahlen  $m_1 \dots m_{2q}$  so bestimmt werden können, daß  $\nu\theta_i = \sum_{j=1}^{2q} m_j \omega_{ij}$ , also  $\nu\theta \equiv 0 \pmod{\omega}$  ist; die kleinste ganze Zahl  $\nu$ , die das leistet, heißt Index von  $\theta$ . Als Involution  $k - h$ -ter Art auf  $V_k$  bezeichnet man ein irreduzibles algebraisches System  $\gamma$  von  $\infty^h$  Mannigfaltigkeiten  $M_{k-h}$  der Art, daß durch den allgemeinen Punkt der  $V_k$  genau eine  $M_{k-h}$  geht; bildet man die Elemente von  $\gamma$  birational auf die Punkte einer  $W_h$  ab, so bezeichnet man deren F. I.  $q' (\leq q)$  als F. I. von  $\gamma$ ; den  $q'$  Integralen 1. Gattung von  $W_h$  entsprechen dabei auf  $V_k$  ebenso viele unabhängige Integrale  $u_i$ , die längs der  $M_{k-h}$  konstant sind bzw. für  $k = h$  in den Punkten einer Gruppe von  $\gamma$  Werte annehmen, die zueinander kongruent sind bezüglich der Integralperioden auf  $W_h$ . Es genügt, den Fall  $k = h$  eingehender zu analysieren; dann besteht  $\gamma$  aus Gruppen von je  $n$  Punkten. Die Simultanperioden der einfachen Integrale 1. Gattung auf  $W_k$  sind Unterperioden der ihnen entsprechenden Integrale auf  $V_k$ , wobei der Index jeder Unterperiode ein Teiler von  $n$  ist. Auf  $V_k$  gibt es stets eine Fundamentalinvolution  $H$  der gleichen F. I.  $q$ ; sie wird für  $q \leq k$  durch die Mannigfaltigkeiten gebildet, längs deren die  $u_1, \dots, u_q$  konstant sind, während sie für  $q \geq k$  aus den Gruppen von je  $m$  Punkten besteht, in deren jeder die  $u_1, \dots, u_q$  zueinander bezüglich der Integralperioden kongruente Werte annehmen; als birationales Bild von  $H$  kann man eine Picardsche Mannigfaltigkeit benutzen, deren einfache Integrale 1. Gattung die gleichen Perioden wie die der  $V_k$  haben. Ist nun  $\theta$  eine Unterperiode der  $u_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) und sind  $u_i, u'_i$  die Werte der  $u_i$  in zwei Punkten  $P, P'$  von  $V_k$ , so bestimmen die Kongruenzen  $u'_i \equiv u_i \pmod{\theta, \omega}$ ,  $i = 1, \dots, q$ , bei festem  $P$  eine von  $P'$  beschriebene algebraische Mannigfaltigkeit, die mit veränderlichem  $P$  auf  $V_k$  eine Involution der F. I.  $q$  beschreibt; diese Involution ist mit  $H$  zusammengesetzt. Daraus läßt sich ableiten, daß auf  $V_k$  jede Involution, deren F. I. mit derjenigen  $q$  von  $V_k$  übereinstimmt, entweder mit  $H$  zusammengesetzt ist oder umgekehrt  $H$  mit ihr. Die Existenz einer Involution der F. I.  $q' < q$  zieht auf  $V_k$  die Existenz eines regulären Systems reduzierbarer, einfacher Integrale 1. Gattung nach sich. Wenn es unter den  $u_i$   $q' (< q)$  Integrale gibt, die längs einer irreduziblen, auf  $V_k$  liegenden  $V_l$  ( $l \geq 1$ ) konstant sind, so bilden sie auf  $V_k$  ein reguläres System von  $q'$  Integralen mit  $2q'$  reduzierten Perioden; für  $k = 2$  weiß man nach Castelnuovo und De Franchis, daß dann  $V_1$  entweder eine isolierte Kurve ist oder einem irrationalen Büschel angehört; ebenso ist im allgemeinen Falle entweder  $V_l$  isoliert oder gehört einem transitiven kontinuierlichen System von  $V_l$  an, die eine isolierte Mannigfaltigkeit auf  $V_k$  erfüllen, längs derer die  $q'$  Integrale konstant sind, oder gehört schließlich einem intransitiven System an, das aus einer stetigen Mannigfaltigkeit transitiver Systeme besteht, die auf den Elementen einer Involution der Art  $\geq l$  von  $V_k$  liegen, längs welcher die  $q'$  Integrale konstant sind. — Nun spezialisiert Verf. seine Untersuchungen auf den Fall  $k = 2$ . Enthält eine Fläche  $F$  der Irregularität  $p_g - p_a = q > 0$  eine Gesamtheit von unendlichvielen Involutionsen der gleichen Irregularität  $q$ , so kann diese Gesamtheit stetig sein — und dann enthält  $F$

ein Kurvenbüschel des Geschlechts  $q$ , mittels dessen jene Involutionen zusammengesetzt sind, und die Involutionen sind birational auf eine Regelfläche des Geschlechts  $q$  oder eine Fläche mit einem Büschel des Geschlechts  $q$  von elliptischen Kurven beziehbar — oder diese Gesamtheit ist diskontinuierlich und dann ist  $F$ , falls sie kein Kurvenbüschel des Geschlechts  $q$  trägt, birational äquivalent: a) einer ein- oder mehrfachen Picardschen Fläche, die  $H$  birational abbildet, also  $q = 2$ , oder b) einer ein- oder mehrfachen elliptischen Fläche, die  $H$  birational abbildet; die Involutionen der Irregularität  $q$  auf  $F$  sind dann birational auf Flächen mit einem elliptischen Büschel elliptischer Kurven abbildbar.

Harald Geppert (Berlin).

Morin, Ugo: *Sulle varietà algebriche a curve-sezioni di genere tre*. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 21, 113—155 (1942).

In vorliegender Arbeit bestimmt Verf. die projektiv verschiedenen Klassen derjenigen normalen  $V_3^n$ , deren Hyperraumschnittkurven das Geschlecht 3 haben; er schließt dabei die Kegelmannigfaltigkeiten und diejenigen  $V_3$ , die durch ein einparametrisches algebraisches Ebenensystem des Geschlechts 3 erzeugt werden, aus und erhält dann 8 Typen solcher  $V_3^n$ , deren Umgebungsraum ein  $S_4, \dots S_{13}$  sein kann, und deren Ordnung  $n$  zwischen 4 und 14 liegt; bis auf die von mehrfachen Flächen freien  $V_3^4$  des  $S_4$ , die den 8. Typ bilden, sind die restlichen 7 Typen rational. Bildet man also die Mannigfaltigkeiten der ersten 7 Typen birational in einen  $S_3$  ab, so erhält man in diesem alle bezüglich Cremonatransformationen verschiedenen linearen Flächensysteme vom Grade  $n > 4$  mit variablen Schnittkurven des Geschlechts 3. So erhält Verf. 34 derartige Linearsysteme, die er geometrisch beschreibt. Als Nebenergebnis findet man, daß diejenigen  $V_3^n$  eines  $S_r$ , deren Schnittkurven mit den  $S_{r-2}$  das Geschlecht 3 haben und deren Schnittflächen mit den  $S_{r-1}$  die Irregularität  $p_g - p_a = 1$  besitzen, Kegel sein müssen. Die Arbeit stützt sich auf die Untersuchungen von G. Castelnuovo [Atti Accad. Sci. Torino 25, 695—715 (1890)] und G. Scorza [Ann. Mat. pura appl., III. s. 16, 255—326 (1909); 17, 281—321 (1910)] über die Flächen mit Hyperebenenschnittkurven des Geschlechts 3.

Harald Geppert (Berlin).

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Myller, A.: *Mittlere Krümmung und Asymptotenlinien*. Gaz. mat. 48, 494 (1943) [Rumänisch].

In Analogie zu dem Enneperschen Satz ist die mittlere Krümmung in einem Flächenpunkte gleich dem Produkt aus der Windung der einen Asymptotenlinie und dem Kotangens des Winkels zwischen den beiden Asymptotenlinien. Harald Geppert.

Charrueau, André: *Sur la courbure et la torsion géodésique*. Bull. Sci. math., II. s. 67, 33—41 (1943).

Une surface  $S$  est rapportée à deux familles de courbes orthogonales,  $L_1$  ( $v = \text{const}$ ),  $L_2$  ( $u = \text{const}$ ); soit  $L$  une courbe tracée sur  $S$  à partir du point  $P$ ,  $i$  l'angle ( $L_1$ ,  $L$ ),  $s$  l'arc de  $L$ ;  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho$  les rayons de courbure géodésique de  $L_1, L_2, L$ ; la formule connue  $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos i}{\varrho_1} + \frac{\sin i}{\varrho_2} + \frac{di}{ds}$  prouve que, si l'on considère toutes les courbes  $L$  issues de  $P$  et pour lesquelles  $\frac{di}{ds}$  a en  $P$  la même valeur non nulle, le lieu des centres de courbure géodésique est une conique dont  $P$  est un foyer, la directrice correspondante joignant les centres de  $L_1$  et  $L_2$ ; si  $\frac{di}{ds}$  est nul, c'est-à-dire si les courbes  $L$  ont trajectoires sous angle constant des courbes  $L_1$ , le lieu est la droite qui vient d'être donnée. — Pour une ligne  $L$  quelconque de  $S$ , considérons le trièdre mobile  $\mathcal{T}$  de Darboux ( $Px$  tangente à  $L$ ,  $Py$  normale à  $L$  dans le plan tangent,  $Pz$  normale à  $S$ ): l'axe instantané  $\Delta$  de rotation de  $\mathcal{T}$  rencontre à angle droit la normale principale de  $L$ , mais il est aussi perpendiculaire: 1° à l'intersection du plan tangent et du plan contenant  $\Delta$  et le centre de courbure géodésique de  $L$ ; 2° à l'intersection du plan  $zPx$  et du plan contenant  $\Delta$  et le centre de courbure normale de  $L$ .  $R, \varrho$  étant les rayons de courbure



normale et géodésique de  $L$ ,  $T_g$  étant le rayon de torsion géodésique de  $L$ ,  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure principaux de  $S$  en  $P$ , la relation

$$\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]^2 + \frac{1}{T_g^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 = 0$$

prouve que, pour tout point  $P$  de la surface, l'extrémité de la projection normale, sur le plan tangent, de la rotation de  $\mathcal{C}$  autour de  $P$  a pour lieu géométrique une circonférence, quelles que soient les courbes considérées issues de  $P$ . — Considérons une portion  $\Sigma$  de surface, sans point singulier, limitée par un contour fermé  $C$  et soumise: sur chaque élément superficiel  $d\Sigma$  à une pression normale  $\frac{2d\Sigma}{R_1 R_2}$ , sur chaque élément linéaire  $d\sigma$  de  $C$ , en un point quelconque  $P$  de  $C$ , à une force située dans le plan tangent à  $\Sigma$  en  $P$ , de composante normale  $\frac{d\sigma}{R}$  (évaluée positivement suivant la demi-normale  $Pn$  intérieure), de composante tangentielle  $-\frac{d\sigma}{T_g}$  suivant la demi-tangente  $Pm$ , telle que  $(Pm, Pn) = +\frac{\pi}{2}$ : le système de forces ainsi obtenu est en équilibre. — Il existe un théorème analogue au précédent, obtenu en remplaçant la valeur  $\frac{2}{R_1 R_2}$  de la pression normale par  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  et prenant comme force appliquée à chaque élément du contour  $C$  une force normale à  $C$ , située toujours dans le plan tangent à la surface et dont la valeur, rapportée à l'unité de longueur d'arc, est égale à  $+1$ .

Gambier (Paris).

Creangă, Ioan: Sur la relation entre les paramètres de distribution des surfaces réglées avec les génératrices respectivement parallèles. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 25, 56—60 (1942).

Als Beispiel und Anwendung zu den Ergebnissen einer früheren Arbeit [C. R. Acad. Sci. Roum. 1, 287—290 (1936)] untersucht der Verf. die beiden Regelflächen  $S$  und  $S_0$

$$S \quad \xi = \xi_0(v) + k(v) \cdot \xi_0(v) + u \cdot \alpha(v),$$

$$S_0 \quad \eta = \xi_0(v) + u \cdot \alpha(v).$$

Dabei soll  $\alpha(v)$  ein Einheitsvektor sein, der in der Schmiegungeebene der Kurve  $\xi_0(v)$  liegt.  $k(v)$  ist eine willkürliche Funktion. Verf. berechnet das Verhältnis der Dralle von  $S$  und  $S_0$  und zeigt, daß sich der Drall jeder Fläche  $S$  durch die Krümmung und Windung von  $\xi_0$  sowie den Winkel  $(\xi', \alpha)$  und die Funktion  $k(v)$  darstellen läßt.

Haack (Karlsruhe).

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Bompiani, Enrico: Approssimazione di una superficie algebrica nell'intorno di una sua retta. Atti Accad. Sci. Torino 78, 68—75 (1943).

Im  $S_3$  mit den cartesischen Koordinaten  $x, y, z$  sei  $F^n$  eine algebraische Fläche  $n$ -ter Ordnung, die eine Gerade  $r$  (die  $z$ -Achse) einfach enthält, also die Gleichungsform

(1)  $\sum_{\mu=0}^{n-1} z^\mu \sum_{\nu=1}^{n-\mu} \varphi_\nu^{(\mu)}(x, y) = 0$ , ( $\varphi_\nu^{(\mu)} \equiv$  Form  $\nu$ -ten Grades in  $x, y$ ) besitzt. Die Tangentialebene in  $0, 0, z$  hat die Gleichung (2)  $\sum_{\mu=0}^{n-1} z^\mu \varphi_1^{(\mu)}(x, y) = 0$ , ist also Tangentialebene in

$n-1$  Punkten von  $r$ , die eine Linearschar  $g_{n-1}^1$  beschreiben. Bei variablem  $z$  ist (2) eine Regelfläche  $R^n$ , die  $r$  zur einfachen und die Ferngerade der Ebene  $z=0$  zur  $n-1$ -fachen Leitgeraden hat und  $F^n$  in der Umgebung 1. Ordnung von  $r$  schmiegt. Enthält  $F^n$  auf  $r$   $d$  Doppelpunkte ( $0 \leq d \leq n-2$ ), so wird die  $g_{n-1}^1$  zu einer  $g_{n-1-d}^1$  und an die Stelle von  $R^n$  tritt eine  $R^{n-d}$ . Die von den Haupttangente der  $F^n$  in den Punkten von  $r$  gebildete Fläche findet man durch Elimination von  $\zeta$  aus

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \zeta^\mu \varphi_1^{(\mu)}(x, y) = 0 \text{ und } \sum_{\mu=0}^{n-2} \zeta^\mu (\varphi_2^{(\mu)}(x, y) + (n-\mu-1)\varphi_1^{(\mu)}(x, y) + (\mu+1)z\varphi_1^{(\mu+1)}(x, y)) = 0,$$

sie ist also i. a. eine  $R^{3n-4}$ . Jeder Doppelpunkt von  $F^n$  auf  $r$  erniedrigt die Ordnung

dieser Regelfläche um 2, falls er biplanar ist und eine oder beide Tangentialebenen durch die  $z$ -Achse gehen, um 3 bzw. 4; jeder dreifache Punkt erniedrigt um wenigstens 5. Ein Doppelpunkt der  $g_{n-1}^1$  ist zugleich parabolischer Punkt der  $F^n$ . Es kann vorkommen, daß  $R^{3n-4}$  und  $F^n$  sich längs  $r$  in zweiter Ordnung berühren, wofür Verf. die analytische Bedingung angibt.

Harald Geppert (Berlin).

**Rollero, Aldo:** Su alcune rigate tangenti od osculatrici ad una superficie algebrica lungo una sua retta multipla. Atti Accad. Sci. Torino 78, 154—168 (1943).

In Fortführung der vorstehend besprochenen Arbeit behandelt nun Verf. den Fall, daß die  $z$ -Achse eine mehrfache Gerade  $r$  der  $F^n$  sei. Zunächst eine Doppelgerade;

$F^n$  hat die Gleichung (1)  $\sum_{\mu=0}^{n-2} z^\mu \sum_{\nu=2}^{n-\mu} \varphi_\nu^{(\mu)}(x, y) = 0$ ; das Tangentialebenenpaar des Punktes  $0, 0, z$  hat die Gleichung (2)  $\sum_{\mu=0}^{n-2} z^\mu \varphi_2^{(\mu)}(x, y) = 0$ . Bei variablem  $z$  stellt (2) eine

Regelfläche  $R^n$  dar, die jeden der von  $r$  ausgehenden Mäntel der  $F^n$  in 1. Ordnung schmiegt und in besonderen Fällen reduzibel sein kann. Ein dreifacher Punkt der  $F^n$  auf  $r$  erniedrigt die Ordnung dieser Schmiegregelfläche i. a. um 1. Die Geraden, die  $F^n$  in den Treffpunkten mit  $r$  vierpunktig schneiden, bilden eine  $R^{5n-12}$ , deren Gleichung sich durch Elimination von  $\zeta$  aus

$$\sum_{\mu=0}^{n-2} \zeta^\mu \varphi_2^{(\mu)}(x, y) = 0 \text{ und } \sum_{\mu=0}^{n-3} \zeta^\mu (\varphi_3^{(\mu)}(x, y) + (n-\mu-2)\varphi_2^{(\mu)}(x, y) + (\mu+1)z\varphi_2^{(\mu+1)}(x, y)) = 0$$

ergibt, und die  $F^n$  in 2. Ordnung längs  $r$  schmiegt. Ein dreifacher Punkt auf  $r$  erniedrigt die Ordnung dieser Schmiegläche i. a. um 3, aber um 4, 5, 6, wenn der zugehörige Tangentialkegel eine, zwei oder drei durch  $r$  gehende Ebenen enthält; die Vielfachheit  $4n-10$  von  $r$  erniedrigt sich dementsprechend um 2, 3, 4 oder 6. Ist  $r$  für  $F^n$  eine Kuspidalgerade, d. h. Ort von uniplanaren Doppelpunkten, mit variabler Berührungsebene, so liegen auf  $r$  eine gerade oder ungerade Anzahl  $d$  dreifacher Punkte, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist; die in 1. Ordnung in der Umgebung von  $r$  schmiegende Regelfläche hat jetzt die Ordnung  $\frac{1}{2}(n-d)$  und enthält  $r$  einfach. Ähnliche Sätze für den Fall, daß die Vielfachheit von  $r$  auf  $F^n$  größer als 2 ist.

Harald Geppert (Berlin).

**Bol, G.:** Doppelverhältnisse im Fünfgewebe. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 21, 21—24 (1942).

Vier Kurvenscharen in der Ebene bilden ein „4-Gewebe“. Es wird dazu eine fünfte so bestimmt, daß längs einer Linie der neuen Schar das Doppelverhältnis der Tangenten an die 4 der vier alten fest bleibt. Diese neue Schar wird „Doppelverhältnisschar“ des 4-Gewebes genannt. Frage: Gibt es 5-Gewebe, bei denen jede Schar D.V.-Schar der andern ist? In der „Geometrie der Gewebe“ von Blaschke und Bol (Berlin 1938; dies. Zbl. 20, 67) findet sich auf S. 110 der Satz, daß jedes solche 5-Gewebe, ein „Ausnahmewebe“ ist, d. h. gleichwertige, zu dem Gewebe aus 4 Geradenbüscheln und dem Kegelschnittbüschel durch die 5 Scheitel. — Es genügt aber auch schon zu dieser Folgerung, daß nur 3 dieser 5 Bedingungen erfüllt sind. — Dies hatte unter Einschränkungen 1937 A. Pantazi gezeigt. Hier wird der Satz neu und sehr einfach bewiesen. An Beispielen wird gezeigt, daß 2 der 5 Bedingungen noch nicht ausreichen.

Blaschke (Hamburg).

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten:

**Wong, Yung-Chow:** On the generalized helices of Hayden and Sypták in an  $N$ -space. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 229—243 (1941).

Es seien  $C$  eine Kurve in einem  $n$ -dimensionalen Riemannschen Raume  $V_n$  mit regulärer Metrik und  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  ihre nichtverschwindenden Krümmungen ( $\kappa_n = 0$ ). Die in dieser Arbeit vorkommenden Kurven gehören zu den folgenden Typen:



$$\begin{aligned}
 (A)_{2m}: \kappa_1 \kappa_2^{-1} &= \text{konst.}, \quad \kappa_3 \kappa_4^{-1} = \text{konst.}, \quad \dots, \quad \kappa_{2m-1} \kappa_{2m}^{-1} = \text{konst.} \quad (h > 2m); \\
 (\bar{A})_{2m}: \kappa_1 &= \text{konst.}, \quad \kappa_2 \kappa_3^{-1} = \text{konst.}, \quad \dots, \quad \kappa_{2m-2} \kappa_{2m-1}^{-1} = \text{konst.} \quad (h > 2m - 1); \\
 (B)_p: \kappa_1 \kappa_2^{-1} &= \text{konst.}, \quad \kappa_2 \kappa_3^{-1} = \text{konst.}, \quad \dots, \quad \kappa_{p-2} \kappa_{p-1}^{-1} = \text{konst.} \quad (h > p - 1); \\
 (\bar{B})_p: \kappa_1 &= \text{konst.}, \quad \kappa_2 = \text{konst.}, \quad \dots, \quad \kappa_{p-1} = \text{konst.} \quad (h > p - 1).
 \end{aligned}$$

In den letzten zwölf Jahren sind einige spezielle Fälle dieser Kurven untersucht worden, und dies gilt insbesondere von den Kurven  $(A)_{2m}$ ,  $h = 2m + 1$  (Hayden, vgl. dies. Zbl. 2, 155) und von den Kurven  $(B)_n$  im euklidischen  $V_n$  (Sypták, vgl. dies. Zbl. 9, 83; 24, 76). Wir bezeichnen mit  $n_0^k, n_1^k, \dots, n_{h-1}^k$  die Einheitsvektoren der Hauptnormalen (inkl. Tangente) in einem beliebigen Punkte von  $C$ . Den Ausgangspunkt für die Betrachtungen des Verf. bildet der folgende Satz: Die zu einem in  $n_{p+1}^{(k_1)} n_{p+3}^{(k_2)} \dots n_{p+2q-1}^{(k_q)}$  gelegenen Vektor  $v^k$  assoziierte Richtung in bezug auf  $C$  ist dann und nur dann in  $n_p^{(k_1)} n_{p+2q}^{(k_2)}$  enthalten, wenn die Verhältnisse  $\kappa_{p+2} \kappa_{p+3}^{-1}, \kappa_{p+4} \kappa_{p+5}^{-1}, \dots, \kappa_{p+2q-2} \kappa_{p+2q-1}^{-1}$  konstante Werte besitzen. Daraus folgt z. B., daß die Kurven  $(\bar{A})_{2m}$ ,  $h = 2m$ , im euklidischen  $V_n$  durch die Existenz eines festen Punktes, durch den alle  $n_1^{(k_1)} n_3^{(k_2)} \dots n_{2m-1}^{(k_m)}$  hindurchgehen, charakterisiert sind. Weitere Untersuchungen beziehen sich auf die sogenannten Spiralen von der Ordnung  $2m + 1$ , d. h. solche Kurven  $C$ , die einen in  $n_0^{(k_1)} n_1^{(k_2)} \dots n_{h-1}^{(k_h)}$  ( $h > 2m \geq 0$ ) gelegenen, längs  $C$  autoparallelen und mit  $n_0^k, n_2^k, \dots, n_{2m}^k$  konstante Winkel bildenden Vektor  $v^k$  zulassen. Diese Spiralen sind immer vom Typus  $(A)_{2m}$  und werden vom Verf. insbesondere im euklidischen Falle eingehend untersucht; in diesem Falle besitzt  $v^k$  eine feste Richtung.

O. Borůvka (Brünn).

### Allgemeine metrische Geometrie:

**Pauc, Christian:** Über ebene Punktmengen, welche überall einen Sektor von gegebener Größe freilassen. J. reine angew. Math. 185, 127—128 (1943).

Sei ein  $\rho > 0$  und ein  $\theta$  mit  $0 < \theta < \pi$  gegeben. Die Menge  $A$  der Ebene sei beschränkt und zu jedem Punkt  $p$  von  $A$  existiere ein Kreissektor  $S$  mit dem Radius  $\rho$  und dem Winkel  $\theta$ , der mit  $A$  nur den Punkt  $p$  gemein hat. Verf. beweist:  $A$  ist enthalten in einer rektifizierbaren Kurve, welche dargestellt werden kann als Summe endlich vieler Bogen  $y = f(x)$  mit Lipschitzbedingung (das Koordinatensystem  $x, y$  kann von Bogen zu Bogen wechseln). (Vgl. Kametani, dies. Zbl. 24, 20.)

Nöbeling (Erlangen).

- { **Nöbeling, Georg:** Über die Flächenmaße im Euklidischen Raum. Math. Ann. 118, 687—701 (1943).  
 { **Nöbeling, Georg:** Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen. Math. Z. 48, 747—771 (1943).

In der ersten Arbeit beschäftigt sich Verf., in Analogie mit seinen Untersuchungen über den Längenbegriff, mit den Beziehungen der verschiedenen Flächenmaßdefinitionen zueinander und zeigt durch Konstruktion geeigneter Beispiele, daß die üblichen zweidimensionalen Maße für allgemeine Flächen des dreidimensionalen euklidischen  $R_3$  verschiedene Zahlenwerte liefern. Eine Vereinheitlichung dieser Begriffe ist also ganz allgemein unmöglich. Beschränkt man sich aber auf dehnungsbeschränkte Flächen, so ergeben alle in Frage kommenden Flächenmaße denselben Wert, wie dies in der zweiten Arbeit gezeigt wird. Dieses Resultat bedeutet genauer folgendes: Bezeichne man mit  $x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_k)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) stetige Funktionen, die eine Teilmenge  $\tilde{M} \subset R_k$  auf die Menge  $M \subset R_n$  abbilden. Besitzt die von den Funktionen  $x_i$  vermittelte Abbildung  $\pi$  die Eigenschaft, daß der Abstand zweier Punkte von  $\tilde{M}$  den mit einer Konstante  $c$  multiplizierten Abstand ihrer Urbilder in  $M$  nicht übertrifft, so heißt  $\pi$  dehnungsbeschränkt und  $M = \pi(\tilde{M})$  ein dehnungsbeschränktes Bild von  $\tilde{M}$ . Bei dehnungsbeschränkten Abbildungen meßbarer Mengen existiert fast über-

all der Funktionaldeterminantenausdruck

$$D(\mathfrak{h}) = \sqrt{\sum \left[ \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} \right]^2},$$

wie auch das klassische Integral

$$I(\tilde{M}) = \int_{\tilde{M}} D(\mathfrak{h}) dy_1 dy_2 \dots dy_k.$$

Verf. zeigt zunächst, daß die verschiedenen üblichen  $k$ -dimensionalen Maße  $\mu_k(M)$  im  $R_n$  für dehnungsbeschränkte Bilder  $M$  analytischer Mengen  $\tilde{M}$  denselben Wert, nämlich  $\mu_k(M) = I(\tilde{M})$  ergeben. Weiter untersucht Verf. die auf  $k$ -dimensionale Hyperflächen verallgemeinerten verschiedenen Flächenmaßdefinitionen von Lebesgue, Peano und Geöcze-Radó für dehnungsbeschränkte Flächen  $F = \pi(\tilde{F})$ , wo  $\tilde{F}$  den  $k$ -dimensionalen Einheitswürfel bedeutet, und zeigt, daß im betrachteten Fall diese alle denselben Wert  $I(\tilde{F})$  liefern. — Es soll noch eine geschichtliche Angabe des Verf. richtiggestellt werden. Von den fünf untersuchten Flächenmaßen werden zwei als Radósche und eins als Maß, dessen Ursprung dem Verf. unbekannt ist, bezeichnet. Alle drei Flächenmaße gehen aber wesentlich auf Z. v. Geöcze zurück [Math. naturwiss. Ber., Ungarn 26, 1—88 (1908); 27, 1—21 und 131—163 (1909)], wie das auch von T. Radó betont wurde [Acta Univ. Szeged 3, 131—169 (1927) und Math. Ann. 100, 445—479 (1928)]. Radó hat die Geöczeschen intuitiven Begriffsbildungen präzisiert und die Eigenschaften des Geöczeschen Flächenmaßes aufgeklärt, weshalb die drei vom Verf. untersuchten Flächenmaße richtig Geöcze-Radósche Flächenmaße heißen dürften.

G. Alexits (Budapest).

### Angewandte Geometrie:

**Lichti: Die Hansensche Aufgabe und die Doppelrechenmaschine.** Z. Vermessungswes., Stuttg. 71, 288—293 (1942).

Es werden zunächst die von K. Schieferdecker und von O. Kerl vorgeschlagenen indirekten Lösungen der Hansenschen Aufgabe mittels der Doppelrechenmaschine kurz erläutert. In Ergänzung dieser Verfahren wird vom Verf. eine neue, direkte Lösung bekanntgegeben, die in ihrem Kern auf vier Vorwärtsabschnitten mit Richtungswinkeln über die Festpunkte beruht. Anschließend wird gezeigt, wie die Schieferdeckersche Lösung noch vereinfacht werden kann. H. Schmehl (Potsdam).

**Werkmeister, P.: Dreifaches Vorwärtseinschneiden mit Ausgleich nach bedingten Beobachtungen.** Allg. Vermess.-Nachr. 55, 74—76 (1943).

Werden in 3 Festpunkten mit den Koordinaten  $x_j, y_j$  nach dem Neupunkt mit den Koordinaten  $x, y$  die Richtungswinkel  $\varphi_j$  gemessen, so haben die Sehstrahlen die Gleichungen  $y - y_j = \operatorname{tg} \varphi_j (x - x_j)$ . Die Bedingung dafür, daß diese Sehstrahlen sich in einem Punkte schneiden, erhält man dadurch, daß man aus ihren Gleichungen die Koordinaten des Neupunktes eliminiert:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 (y_2 - y_3) + \operatorname{tg} \varphi_2 (y_3 - y_1) + \operatorname{tg} \varphi_3 (y_1 - y_2) \\ + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3 (x_2 - x_3) + \operatorname{tg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1 (x_3 - x_1) + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 (x_1 - x_2) = 0.$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, werden zu den Richtungswinkeln die Verbesserungen  $v_j$  addiert. Wird die linke Seite der Bedingungsgleichung mit  $F$  bezeichnet, so ist die linearisierte Bedingungsgleichung  $\left[ \frac{\partial F}{\partial \varphi} v \right] + F = 0$ . Bestimmt man den Multiplikator  $m$  aus der Gleichung  $\left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)^2 \right] m + F = 0$ , so sind die Verbesserungen  $v_j = \frac{\partial F}{\partial \varphi_j} m$ . Wurden die Richtungswinkel je gleich genau gemessen, so ist ihr mittlerer Fehler  $\mu = \sqrt{[v^2]}$ . Wird der Richtungswinkel  $\varphi_j$  durch  $\varphi_j + \mu$  ersetzt, und werden die nach der Ausgleichung dieser Richtungswinkel erhaltenen Neupunktskoordinaten mit  $x + \Delta x_j, y + \Delta y_j$  bezeichnet, so setzt der Verf. die mittleren Fehler der Neupunktskoordinaten



$\mu_x = \sqrt{[(\Delta x)^2]}$ ,  $\mu_y = \sqrt{[(\Delta y)^2]}$ . In einem Zahlenbeispiel ergibt diese Ausgleichung dasselbe wie die nach vermittelnden Beobachtungen. *Ludwig* (Hannover).<sub>o</sub>

**Pinkwart: Die Umformung gleichartiger Koordinaten. Tl. 2. Allg. Vermess.-Nachr. 54, 209—223, 234—243 u. 253—265 (1942).**

Als Fortsetzung der gleichnamigen Veröffentlichung (dies. Zbl. 27, 140), die die ebene Umformung enthielt, wird im zweiten Teil die Koordinatenumformung unter Berücksichtigung der Erdkrümmung behandelt. Dabei wird die Umformung gleichartiger Koordinaten als Sonderfall der allgemeinen Umformung von Koordinaten betrachtet, so daß auch die für ungleichartige Koordinaten entwickelten Verfahren herangezogen werden. Die zahlreichen Beiträge zu den einzelnen Verfahren sind im Zusammenhang beschrieben, kritisch einander gegenübergestellt und durch neue Vorschläge ergänzt. In der zusammenfassenden Schlußbetrachtung wird als Zweck der Koordinatenumformung die Schaffung eines einheitlichen Reichsfestpunktfeldes dargestellt; jeden einzelnen Polygon- und Kleinpunkt umzuformen, wird nicht für notwendig erachtet. Der Zweck ist im allgemeinen bereits erreicht, wenn in alle Pläne, insbesondere die Katasterpläne, das Gauß-Krüger-Gitternetz eingetragen ist. Dieses sei aber vordringlich.

*H. Schmehl* (Potsdam).<sub>o</sub>

**Näbauer, M.: Beziehungen am Meridian des Erdellipsoids. Z. Vermessungswes., Stuttg. 72, 130—135 (1943).**

Inhalt eines Studienbehelfs. Zusammenhänge zwischen geographischer, reduzierter und geozentrischer Breite und den kartesischen Koordinaten. Der tg der Differenz zweier Breiten wird durch je eine dieser Breiten ausgedrückt. Verschiedene Halbmesser. Errichtet man im Schnittpunkte der Normalen mit der großen Hauptachse die Senkrechte und schneidet diese Senkrechte mit dem geozentrischen Halbmesser, so hat dieser Schnittpunkt von der kleinen Hauptachse denselben Abstand wie der Krümmungsmittelpunkt. Achsenabschnitte der Tangente und Normalen. Der Abstand  $e^2 a \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$  der Normalen vom Mittelpunkt erreicht für  $\cos 2\varphi = 1 - \frac{2}{e^2} (1 - \sqrt{1 - e^2})$ , also für eine Breite wenig größer als  $45^\circ$ , seinen größten Wert. Zahlen für das Besselsche und Hayfordsche Erdellipsoid. Literatur. Anm. des Ref.: In Gleichung (19) muß  $\frac{a}{b}$  durch seinen reziproken Wert ersetzt werden. In Gleichung (55) muß der Faktor  $e$  gestrichen werden;  $\sqrt{2 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} - \sqrt{1 - e^2} \right\}}$  kann zu  $1 - \sqrt{1 - e^2}$  vereinfacht werden.

*K. Ludwig* (Hannover).

**Wittke, H.: Reihenentwicklungen für die isometrische Breite. Z. Vermessungswes., Stuttg. 72, 139—143 (1943).**

Die isometrische (wachsende) Breite  $q$  hat durch die Arbeiten von Th. Craig, Pizetti, J. I. Craig, Grabowski, Eggert, Laborde, Großmann, und Ref. u. a. zunehmende Bedeutung erlangt. Sie wird wie folgt definiert (Bezeichnungen nach Jordan-Eggert):

$$q = \int_0^q \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi = \int_0^q \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi$$

$$= \lg \operatorname{nat} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \pi \right) - e^2 \sin \varphi - \frac{1}{3} e^4 \sin^3 \varphi - \frac{1}{5} e^6 \sin^5 \varphi - \dots$$

Nach dem Vorbild von Adams hat Verf. an Stelle der Sinuspotenzen auch noch die Sinus der Winkelvielfachen eingeführt, wobei er bis zu  $e^{10}$  gegangen ist. Weiter hat er mit dem Exzentrizitätswert des Besselschen Ellipsoids die Zahlenkoeffizienten und deren Logarithmen der je zwei Reihen für  $q$  und  $\mu q$  berechnet. Der Wert für  $e^2$  ist jedoch in den letzten Stellen falsch eingesetzt: 0,00667 43722 31315 statt richtig 0,00667 43722 30614.

*Wl. K. Hristow* (Sofia).



**Pisa, Salvatore di:** Sulla geometria d'un ellissoide a tre assi poco differente da un ellissoide di rotazione. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 460—463 (1942).

Soit un ellipsoïde de révolution  $E$  dont les coordonnées paramétriques sont:

$$x = \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \omega, \quad y = \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \omega, \quad z = \frac{a(1-e^2)}{W} \sin \varphi$$

avec:  $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$  où  $\varphi$  et  $\omega$  sont la latitude et la longitude, et soit un ellipsoïde  $E'$  à trois axes dont les coordonnées paramétriques sont de même:

$$x' = \frac{a(1 + \frac{1}{2}\mu)^2}{W'} \cos l \cos \lambda, \quad y' = \frac{a(1 - \frac{1}{2}\mu)^2}{W'} \cos l \sin \lambda, \quad z' = \frac{a(1 - e^2)}{W'} \sin l$$

avec:  $W' = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 l + \mu(\cos 2\lambda + \frac{1}{2}\mu) \cos^2 l}$ , où  $l$  et  $\lambda$  sont la latitude et la longitude. Ces deux ellipsoïdes concentriques et coaxiaux ont en commun le demi-axe situé sur l'axe des  $z$  tandis que la moyenne arithmétique des demi-axes équatoriaux:  $a(1 + \frac{1}{2}\mu)$  et  $a(1 - \frac{1}{2}\mu)$  est égale au rayon équatorial  $a$  de l'ellipsoïde de révolution. On établit entre les deux ellipsoïdes une correspondance biunivoque telle qu'à chaque point  $P'(x', y', z')$  de  $E'$  corresponde un point voisin  $P(x, y, z)$  de  $E$ . On a:

$$x' = x + h \cos l \cos \lambda, \quad y' = y + h \cos l \sin \lambda, \quad z' = z + h \sin l$$

avec:  $h = \overline{PP'}$ . Posant:  $l - \varphi = \xi$ ,  $\lambda - \omega = \xi_1$ ,  $\xi$  et  $\xi_1$  étant du même ordre de petitesse que  $\mu$  on arrive par un calcul rapide en tenant compte de l'approximation donnée aux expressions suivantes:

$$\xi = \frac{1}{2}\mu(1 + \frac{1}{2}e^2 \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi \cos 2\omega,$$

$$\xi_1 = \mu \sin 2\omega,$$

$$h/a = \frac{1}{2}\mu(1 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \cos 2\omega.$$

Si on appelle  $\varepsilon$  l'angle des deux normales aux deux ellipsoïdes en deux points correspondants on a:

$$\sin \varepsilon = \sqrt{\left\| \begin{array}{ccc} \cos \varphi \cos \omega & \cos \varphi \sin \omega & \sin \varphi \\ \cos l \cos \lambda & \cos l \sin \lambda & \sin l \end{array} \right\|^2}.$$

Avec l'approximation supposée:  $\varepsilon = \sqrt{\xi^2 \cos \varphi + \xi_1^2}$  avec:  $\eta = \xi_1 \cos \varphi$  et la deuxième des relations ci-dessus peut s'écrire:  $\eta = \mu \cos \varphi \sin 2\omega$ . *G. Laclavère (Paris).*

**Schürba, Walther:** Winkelmethode zur Absteckung einer Klothoide. Allg. Vermess.-Nachr. 54, 277—289 (1942).

Verf. setzt voraus, daß der Sehnentangentenwinkel der Klothoide näherungsweise gleich dem dritten Teil des zugehörigen Tangentenwinkels ist. Mit dieser Annahme und einigen besonderen mathematischen Eigenschaften der Klothoide gelangt er zu Näherungsformeln für den Peripheriewinkel eines beliebigen Bogenstücks der Klothoide. Die darauf aufbauenden Absteckverfahren gleichen denen der bekannten Peripheriewinkelmethode der Kreisbogenabsteckung und haben dieselben Vorzüge der Anwendbarkeit in unübersichtlichem Gelände, wo die Absteckung von der Tangente aus auf Schwierigkeiten stößt. Den Grundgedanken seiner Ausführungen hat Verf. nach eigener Mitteilung der später veröffentlichten Arbeit: A. Haerer, Die Absteckung langer Übergangsbögen beim Bau der Reichsautobahnen (Schriftenreihe der „Straße“ 25, Berlin 1942) entnommen. *H. Schmehl (Potsdam).*

## Topologie:

**Ribeiro, Hugo:** Sur les espaces à métrique faible. Portugaliae Math. 4, 21—40 (1943).

Un espace à métrique faible est un ens.  $I$  non vide où l'on a fait correspondre à tout couple ordonné  $(x, y)$  de points de  $I$  un nombre réel non négatif  $\varrho(x, y)$  appelé distance faible de  $x$  à  $y$  et vérifiant les deux axiomes suivants: I(a):  $x = y \rightarrow \varrho(x, y) = 0$ ; II:  $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ . Tout espace à métrique faible est considéré comme un espace topologique en prenant comme fermeture (ou adhérence) de tout sous-ens.  $X$  le sous-ens.  $\bar{X}$  défini comme suit: Pour  $X \neq \emptyset$  on pose  $\bar{X} = \text{ens. des points } x \text{ tels}$



que  $\inf_{y \in X} \varrho(x, y) = 0$ ; et pour  $X = 0$  on pose  $\bar{X} = 0$ . Alors tout espace à métrique faible est un espace de Kuratowski [c.-à-d. un espace  $(V)$  au sens de M. Fréchet vérifiant les deux axiomes:  $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$  et  $\overline{X + Y} \subset \bar{X} + \bar{Y}$ ]. Quand on impose aux espaces à métrique faible de satisfaire respectivement à l'axiome de séparation de Kolmogoroff ou à l'axiome de séparation des espaces accessibles de M. Fréchet, on obtient respectivement tous les espaces quasi-métriques de G. E. Albert (ce Zbl. 27, 142) ou tous les espaces quasi-métriques de W. A. Wilson (ce Zbl. 2, 55). Dans tout espace à métrique faible,  $\varrho(x, y)$  est une fonction semi-continue supérieurement de  $y$  et semi-continue inférieurement de  $x$ . On appelle espace faiblement métrisable tout espace  $(V)$  susceptible d'être considéré comme un espace à métrique faible au moyen d'une définition convenable de la fonction  $\varrho(x, y)$ . Tout espace de Kuratowski vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est un espace faiblement métrisable. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace  $(V)$  soit faiblement métrisable est qu'il existe une famille de fonctions réelles définies et également semi-continues supérieurement dans tout l'espace, cette famille contenant, pour chaque point et pour chaque voisinage de ce point, une fonction s'annulant en ce point et dont la borne inférieure dans le complémentaire de ce voisinage soit  $> 0$ . L'A. obtient deux autres conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace  $(V)$  soit faiblement métrisable; ces conditions portent sur le choix des voisinages dans l'espace  $(V)$  considéré; l'une d'elles rappelle le critère de métrisation de A. H. Frink (ce Zbl. 16, 82). Tout espace de Hausdorff compact (c.-à-d. tel que tout sous-ens. infini admette au moins un point d'accumulation) et faiblement métrisable est métrisable. L'A. pose, sans la résoudre, la question de savoir si tout espace normal faiblement métrisable est nécessairement métrisable. L'A. note que l'idée des espaces à métrique faible et le problème de caractériser topologiquement ces espaces lui ont été respectivement fournie et posé par H. Hopf (cours du 1<sup>er</sup> semestre 1942—1943).

A. Appert (Rennes).

Colmez, Jean: Sur le problème de Wiener; solution générale du problème dans le cas le plus général. C. R. Acad. Sci., Paris 215, 519—521 (1942).

Es seien  $P$  eine Menge von abstrakten Elementen und  $\sigma$  eine Familie von eindeutigen Abbildungen von  $P$  auf sich (Permutationen). Das Wiener'sche Problem (vgl. Fréchet, Les espaces abstraits, Paris 1928, S. 196) besteht darin, eine Definition von abgeschlossenen Hüllen für die Untermengen von  $P$  derart zu erklären, daß die vier Axiome von Kuratowski [Fundam. Math. 3, 182—199 (1922)] erfüllt sind und daß im so definierten topologischen Raume  $R$ , jede Permutation von  $\sigma$  eine Homöomorphie ist. Es ist klar, daß das Problem wesentlich unverändert bleibt, wenn man  $\sigma$  als eine Gruppe von Permutationen voraussetzt. — Es sei  $G$  eine gegebene Gruppe von Permutationen in  $P$ . Betrachtet wird nun ein die vier folgenden Bedingungen erfüllendes System  $\Phi$  von Untermengen von  $P$ : (1) Die Nullmenge und die ganze Menge  $P$  sind Mengen von  $\Phi$ . (2) Jede Summe von endlich vielen Mengen von  $\Phi$  ist eine Menge von  $\Phi$ . (3) Der Durchschnitt von beliebig vielen Mengen von  $\Phi$  ist eine Menge von  $\Phi$ . (4) Jede Permutation von  $G$  bildet  $\Phi$  auf sich ab. Hat man ein solches System  $\Phi$  definiert, so kann man  $\Phi$  als das System aller abgeschlossenen Mengen des zu definierenden topologischen Raumes  $R$  nehmen. Die Erklärung von abgeschlossenen Hüllen wird also bekanntlich durch die Angabe des Systemes  $\Phi$  aller abgeschlossenen Mengen eindeutig bestimmt. Jetzt ist jede Permutation von  $G$  eine Homöomorphie im so definierten Raume  $R$ . Auf diese Weise ist das Problem auf die Konstruktion eines Systemes  $\Phi$  zurückgeführt. Sodann zeigt Verf., daß man ein solches System  $\Phi$  konstruieren kann. Folglich ist das Problem immer lösbar. — Auszuschließen sind zwei triviale Lösungen: (1) die Lösung, bei welcher das System  $\Phi$  aus allen Untermengen von  $P$  besteht; (2) die Lösung, bei welcher  $\Phi$  nur die Nullmenge und die ganze Menge  $P$  enthält. Es wird aber bewiesen, daß nicht triviale Lösungen immer existieren, wenn  $P$  eine unendliche Menge ist. — Weiter untersucht Verf. einige Sonderfälle, wo die gegebene Gruppe  $G$  gewisse Bedingungen erfüllt. Ky Fan (Paris).